

# ESTUDIO DE LA CINEMÁTICA DIRECTA DE UNA ARTICULACIÓN DE 3 GDL (RRR) UTILIZANDO LA METODOLOGÍA DENAVIT-HARTENBERG

Dr. José Antonio Garrido Natarén<sup>1</sup>, MC. Delia del Carmen Gamboa Olivares<sup>2</sup>,  
MC. José Luis Fernando Palomeque Loyo<sup>3</sup>, Damián Baruch Lagunes Sarmiento y Pedro Castro Valiente<sup>4</sup>

**Resumen**— Se presenta una plataforma de simulación virtual DynaMat que permite estudiar, caracterizar, simular, observar y manipular una articulación tipo rótula con 3 grados de libertad. La plataforma fue desarrollada en lenguaje C++ utilizando la librería MFC lo que permite su evolución para su utilización sobre cualquier configuración de un brazo manipulador. Se utiliza la metodología de Denavit-Hartenberg para caracterizar las articulaciones (revoluta o prismática), se representan los datos a través de un modelo de datos (data model) basado en colecciones MFC y finalmente se anima el movimiento de las articulaciones utilizando objetos de temporización (timers). El graficado en 3D se simula con una proyección ortogonal de objetos gráficos simples (rectángulos y círculos).

**Palabras clave**—Robótica, Denavit-Hartenberg, cinemática directa, simulación, DynaMat.

## Introducción—

Un brazo manipulador, es una cadena cinemática abierta con N Grados de Libertad (GDL). Los eslabones están unidos uno a uno por articulaciones de tipo revoluta o prismático. El estudio de la Cinemática Directa de un brazo de robot se realiza para determinar el movimiento así como la posición y orientación (sistema de referencia) del elemento terminal a partir de los ángulos de las articulaciones revolutas y las distancias de las articulaciones prismáticas. Cada eslabón mantiene un sistema de referencia relativo al precedente. En 1955 Jacques Denavit y Richard Hartenberg introdujeron una convención con el propósito de estandarizar la ubicación de los sistemas de referencia de los eslabones de una cadena cinemática abierta (brazo manipulador). La metodología Denavit-Hartenberg (DH) permite establecer la ubicación del sistema de referencia del eslabón N+1 a partir del sistema de referencia del eslabón N con tan solo 4 parámetros (figura 1):

- 1) El ángulo  $\theta_i$  como el ángulo desde  $X_{i-1}$  hasta  $X_i$  girando alrededor de  $Z_{i-1}$ .
- 2) La distancia  $d_i$  como la distancia desde el sistema  $O_{i-1}$  hasta la intersección de las normales común entre  $Z_{i-1}$  y  $Z_i$ , a lo largo de  $Z_{i-1}$ .
- 3) La distancia  $a_i$  como la longitud de la normal común, es decir, es la distancia de  $Z_{i-1}$  a  $Z_i$  medida a lo largo de  $X_i$ .
- 4) El ángulo  $\alpha_i$  como el ángulo que hay que rotar  $Z_{i-1}$  para llegar a  $Z_i$ , rotando alrededor de  $X_i$ .

Cada parámetro se aplica al sistema de referencia de la articulación N de forma consecutiva para obtener el sistema de referencia del eslabón N+1. Como los 4 parámetros combinan rotación con desplazamiento se requiere utilizar una matriz de coordenadas homogéneas que permita reagrupar las 4 transformaciones geométricas en una sola operación matricial, dando como resultado la matriz de transformación generalizada DH para una articulación:

$${}^{i-1}\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<sup>1</sup> El Dr. José Antonio Garrido Natarén es Profesor de robótica del Instituto Tecnológico de Veracruz, TNM México [jgarrido@dynadata.com](mailto:jgarrido@dynadata.com) (autor corresponsal)

<sup>2</sup> La MC. Delia del Carmen Gamboa Olivares es Profesora de Ingeniería Industrial del Instituto Tecnológico de Veracruz, TNM México [delia\\_gamboa@hotmail.com](mailto:delia_gamboa@hotmail.com)

<sup>3</sup> El MC. José Luis Fernando Palomeque Loyo es Profesor de Ingeniería Electrónica del Instituto Tecnológico de Veracruz, TNM México [jlf\\_palomeque@hotmail.com](mailto:jlf_palomeque@hotmail.com)

<sup>4</sup> Damián Baruch Lagunes Sarmiento y Pedro Castro Valiente son estudiantes de la carrera de ingeniería mecatrónica del Instituto Tecnológico de Veracruz, México

La matriz de transformación generalizada DH se aplica al sistema de referencia de un eslabón para obtener el sistema de referencia del eslabón siguiente. Sin embargo como puede observarse, el método fue inicialmente concebido para articulaciones con 1 grado de libertad ya que como lo describe M.Sc. Kryscia Ramírez Benavides [1] en su documento “Cinemática Directa del Robot”, los parámetros  $a_i$  y  $\alpha_i$  representan la estructura mecánica del eslabón (longitud y torsión respectivamente) y no pueden ser considerados más de 1 vez en el caso de una misma articulación.

El presente artículo presenta el estudio de una articulación tipo RRR utilizando la plataforma de simulación DynaMat con la metodología Denavit-Hartenberg. Primeramente se presenta una caracterización “redundante” con los 4 parámetros DH considerados en cada articulación lo que da un eslabonamiento clásico, enseguida se presenta la caracterización correcta. La plataforma de simulación virtual DynaMat permite apreciar la diferencia de manera interactiva.

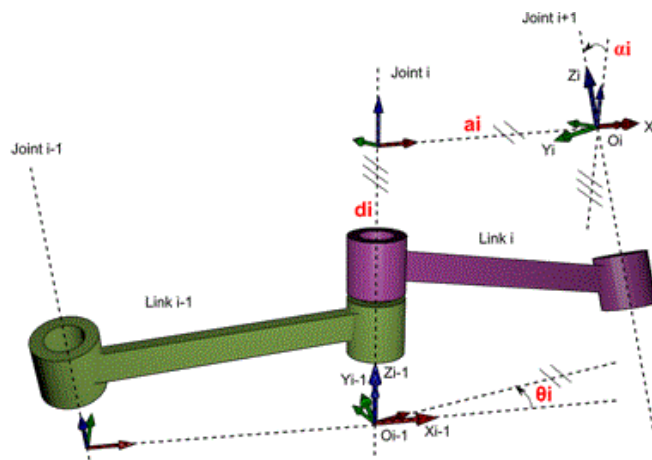


Figura 1. Los 4 parámetros de DH.

### La Articulación de tipo Rótula

Una rótula es una articulación ampliamente utilizada en la industria que permite 3 GDL sobre un solo punto y que transmite el movimiento a través del perno.

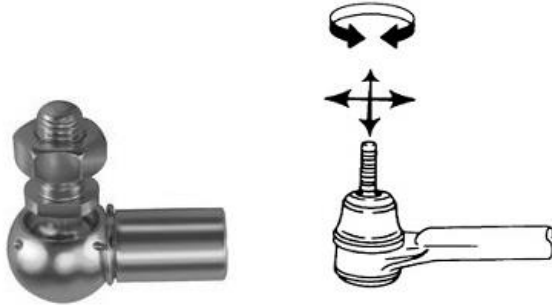


Figura 2. Una rótula con 3 GDL.

Una rótula presenta una cadena cinemática de tipo RRR (Revoluta-Revoluta-Revoluta) sobre un mismo punto. La figura 3 presenta los sistemas de referencia de la base, de la articulación y del extremo de la cadena cinemática obtenidos al caracterizar la rótula según el método DH.

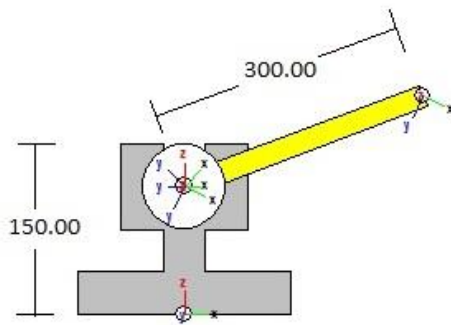


Figura 3. Sistemas de referencia de una rótula con 3 GDL.

### Determinación de una rótula redundante

Si caracterizamos la rótula de manera “redundante” obtenemos la tabla 1 que presenta los parámetros DH para cada articulación de la cadena cinemática, en el cual los ángulos son variables.

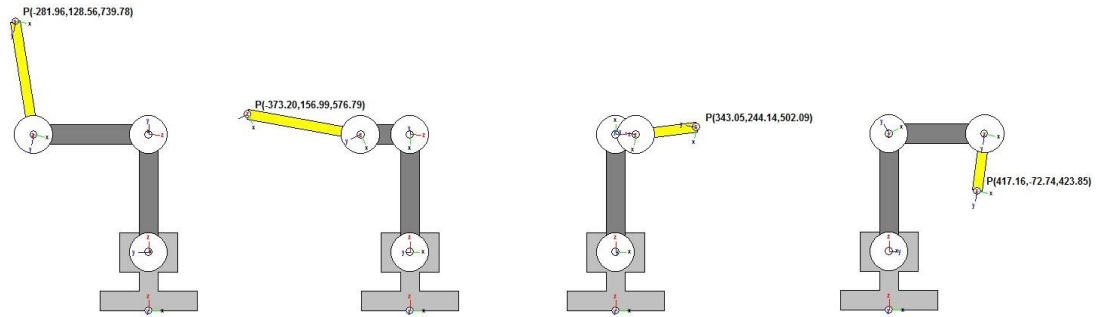


Figura 4. Eslabonamiento generado por DynaMat según la tabla 1.

### Determinación de una rótula con DynaMat

Si caracterizamos la rótula omitiendo los parámetros  $a_i$  que son redundantes obtenemos la tabla 2 que presenta los parámetros DH para una articulación tipo rótula.

ESLABON	THETA	D	A	ALPHA
E1	0.0	150.0	0.0	0.0
E2	THETA2 = 45.0	0.0	0.0	-90.0
E3	THETA3 = 90.0	0.0	0.0	90.0
E4	THETA4 = 90.0	300.0	0.0	0.0

Tabla 2. Parámetros DH para cada eslabón de una rótula con 3 GDL.

Esta caracterización representa una rótula con 3 GDL como lo muestra la secuencia de la figura 5.

(morfología) a partir de la tabla de parámetros DH sin necesidad de derivación de objetos C++ y en un segundo tiempo sería conveniente extender el estudio a la cinemática inversa del eslabonamiento.

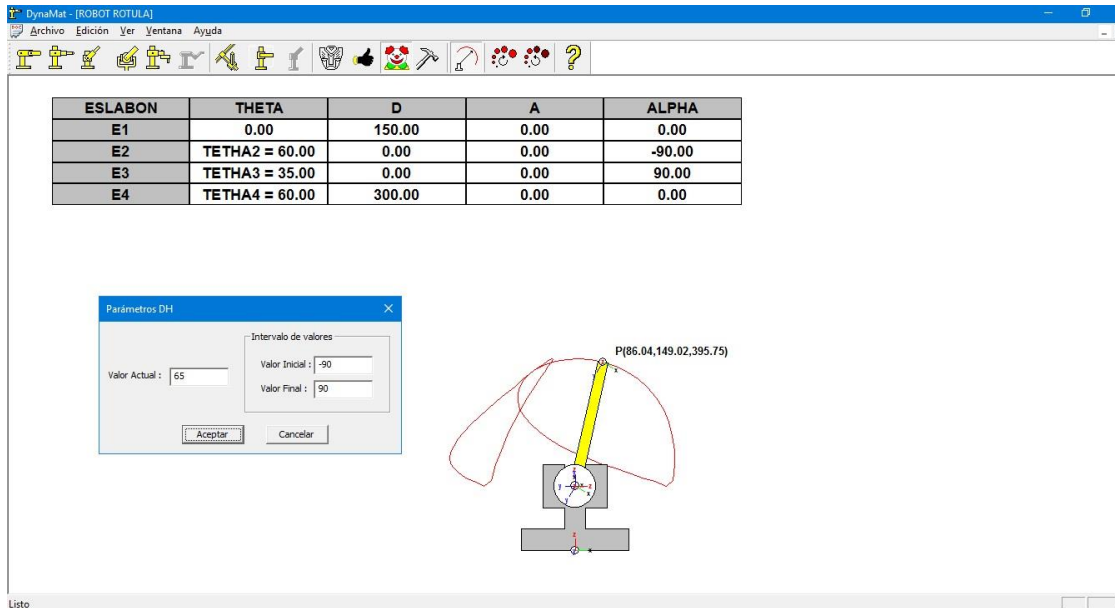


Figura 6. Secuencia de simulación de una rótula con DynaMat.

### Referencias

- [1] M.Sc. Kryscia Ramírez Benavides “Cinemática Directa del Robot”. Escuela de Ciencias de la Computación e Informática. Universidad de Costa Rica.
- [2] Efraín Ramírez Cardona et al. “Cinemática directa utilizando Denavit-Hartenberg y generación de trayectorias para el robot FANUC”. XII JORNADAS DE INVESTIGACIÓN. Revista Investigación Científica, Vol. 4, No. 2, Nueva época. Mayo - Agosto 2008
- [3] Peter Corke . “Denavit-Hartenberg notation for common robots”. March 2014.
- [4] Antonio Barrientos et al. FUNDAMENTOS DE ROBÓTICA. Universidad Politécnica de Madrid. McGraw Hill.1997.
- [5] Mark W. Spong, Seth Hutchinson, and M. Vidyasagar. “Robot Dynamics and Control”. John Wiley & Sons 2004.
- [6] C. Bellevaux, J. Garrido. “Designing with Volumes”. 3eme Journées Scientifiques et Techniques de la Production Automatisée de la ADEPA. 1981 Toulouse Francia.
- [7] J. Garrido “MGIT Un Modelleur Géométrique Interactif Tridimensionnel”, Tesis Doctoral junio de 1981

### Notas Biográficas

El **Dr. José Antonio Garrido Natarén** es profesor del Instituto Tecnológico de Veracruz. Realizó su doctorado en matemáticas aplicadas en la École Nationale Supérieure de Techniques Avancées ENSTA en Paris Francia con el tema “MGIT un modelador geométrico tridimensional”. Fue CEO fundador de la compañía DYNADATA S.A. dedicada al desarrollo de sistemas de concepción asistida por computadora CAD.

La **MC. Delia del Carmen Gamboa Olivares** profesora de tiempo completo del Instituto Tecnológico de Veracruz. Realizo estudios de Maestría en Ingeniería Industrial en el Instituto Tecnológico de Orizaba. Egresada de la carrera de ingeniería industrial en producción del Instituto Tecnológico de Veracruz, actualmente imparte las materias de simulación, investigación de operaciones y taller de investigación 1 y 2.

El **MC. José Luis Fernando Palomeque Loyó** es profesor de tiempo completo en el Instituto Tecnológico de Veracruz donde imparte las materias de amplificadores operacionales, electrónica de potencia y electrónica industrial. Es egresado de la carrera de Ingeniería Industrial en Electrónica del Instituto Tecnológico de Veracruz y realizó estudios de maestría en el CIIDET Querétaro.