SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE VERACRUZ

ROBOTICA 9F1A

EQUIPO #5

INTEGRANTES:

SERVIN PAZ SERGIO E14020820

RAMON FERNANDEZ ALEJANDRO E14020798

SALDAÑA VILLARAUZ AMISADAI E15021107

PROFESOR: Dr. JOSE ANTONIO GARRIDO NATAREN.

3.1 Sistemas de Coordenadas

Representación de un punto en el sistema de coordenadas (cartesianas, polares).

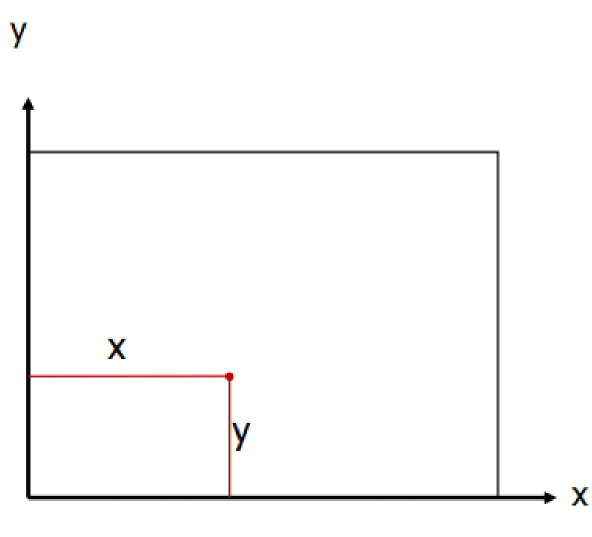
La descripción del movimiento de un cuerpo requiere la introducción de un sistema de coordenadas espaciales que identifiquen cada punto del espacio y una coordenada temporal.

A este conjunto de coordenadas espacio-temporal se denomina sistema de referencia.

Un sistema de referencia viene dado por un punto de referencia denominado origen y un sistema de coordenadas. El origen de las coordenadas es el punto de referencia de un sistema de coordenadas y en él, el valor de todas las coordenadas del sistema es nulo. Sobre cada uno de los ejes se definen vectores unitarios, denominados versores, que indican la dirección del eje.

Un sistema de coordenadas es un conjunto de valores y puntos que permiten definir la posición de cualquier punto de un espacio euclídeo. El primero que expresó la posición de un punto en el plano o en el espacio fue Descartes, por lo que se suele referir a ellas como coordenadas cartesianas. Para representar un punto en un plano, utilizó dos rectas perpendiculares entre sí, de forma que la posición del punto se determinaba midiendo sobre los ejes las distancias al punto.

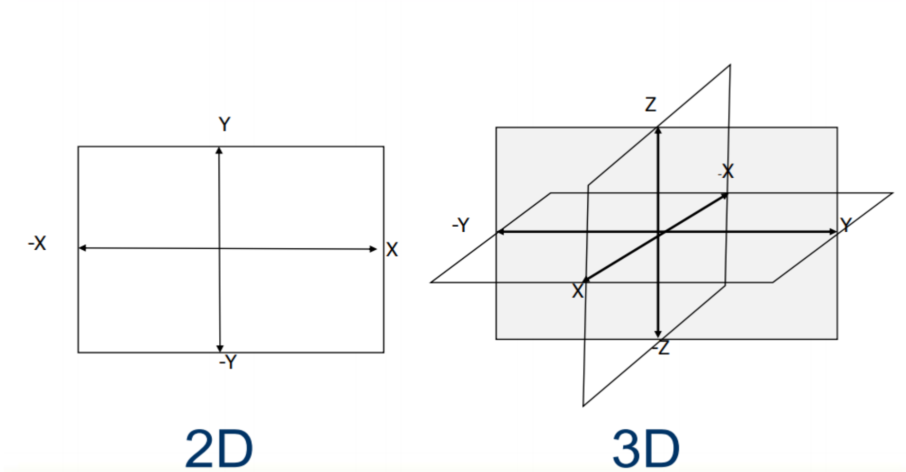
Sobre dichas rectas se definen como vectores unitarios o versores perpendiculares entre sí que son vectores de módulo unidad, que determinan una base ortonormal.



RAMON FERNANDEZ ALEJANDRO

Sistema de coordenadas cartesianas (x,y,z).

Un sistema de coordenadas cartesianas se define por dos ejes ortogonales en un sistema bidimensional y tres ejes ortogonales en un sistema tridimensional, que se cortan en el origen O. Las coordenadas de un punto cualquiera vendrán dadas por las proyecciones del vector de posición del punto sobre cada uno de los ejes.



Dado un vector r del espacio tridimensional y tres planos que se cortan en el punto de origen de r, se definen las coordenadas cartesianas (x y z) como las tres proyecciones ortogonales del vector sobre las tres aristas de intersección de los planos perpendiculares; los tres planos se identifican por yz, zx, xy respectivamente.

En un sistema de coordenadas cartesianas se definen (i, j, k) en la dirección de los ejes x, y, z.

RAMON FERNANDEZ ALEJANDRO

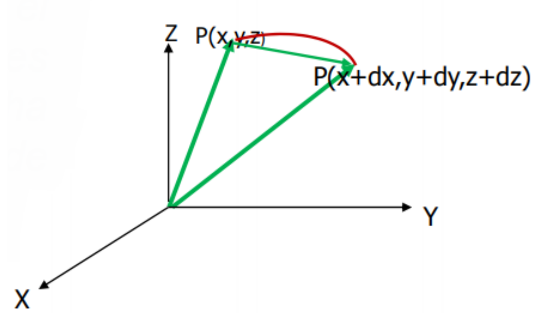
Variación infinitesimal de las coordenadas.

Si las coordenadas del punto varian infinitesimal en el espacio, siendo tales variaciones dx, dy, dz, la variación que ha experimentado el vector de posición es

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

y el punto habrá recorrido un elemento diferencial de arco

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

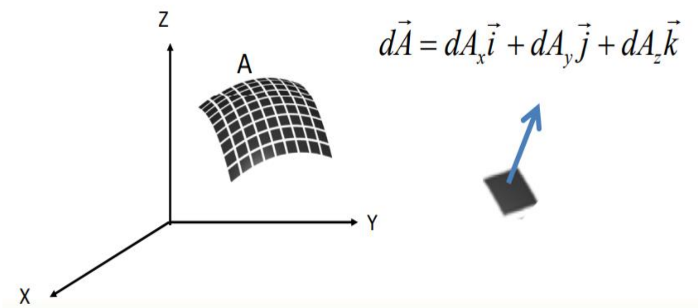


RAMON FERNANDEZ ALEJANDRO

Elemento diferencial de superficie.

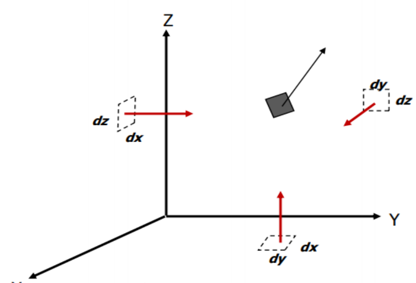
Dada la superficie A, seleccionamos un elemento diferencial de superficie.

El vector característico de la superficie (dA), tiene tres componentes, cada una de ellas dirigida sobre cada uno de los ejes.



Elemento diferencial de superficie.

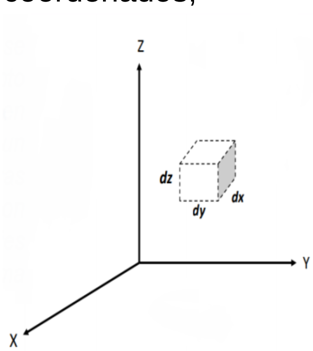
Los valores de las componentes se obtienen proyectando el elemento diferencial de superficie sobre los tres planos coordenados



$$d\vec{A} = dy \cdot dz\vec{i} + dx \cdot dz\vec{j} + dx \cdot dy\vec{k}$$

Elemento diferencial de volumen.

Dado un volumen V, se selecciona un elemento diferencial de volumen formado por un paralelepípedo cuyas aristas (dx, dy, dz) son paralelas a los ejes coordenados, de forma que: **dV=dx·dy·dz**



RAMON FERNANDEZ ALEJANDRO

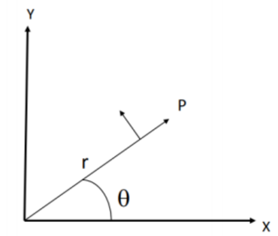
Sistema de coordenadas polares (r, θ).

Para representar puntos en el plano se utiliza en muchas ocasiones el sistema de coordenadas polares.

En este sistema se necesitan un ángulo (θ) y una distancia (r).

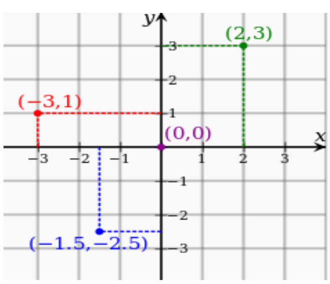
Para medir θ, en radianes, necesitamos una semirrecta dirigida llamada eje polar y para medir r, un punto fijo llamado polo.

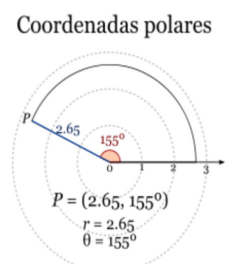
Para expresar la posición de un punto P en coordenadas polares (r θ), se define un vector unitario Ur que indique la dirección de la línea radial que une el origen O y P, y un vector unitario Uθ perpendicular Ur orientado hacia valores crecientes de θ.



$$O\vec{P} = \vec{r} = r\vec{u}_r$$

Representación de un Punto en un Sistema de Coordenadas



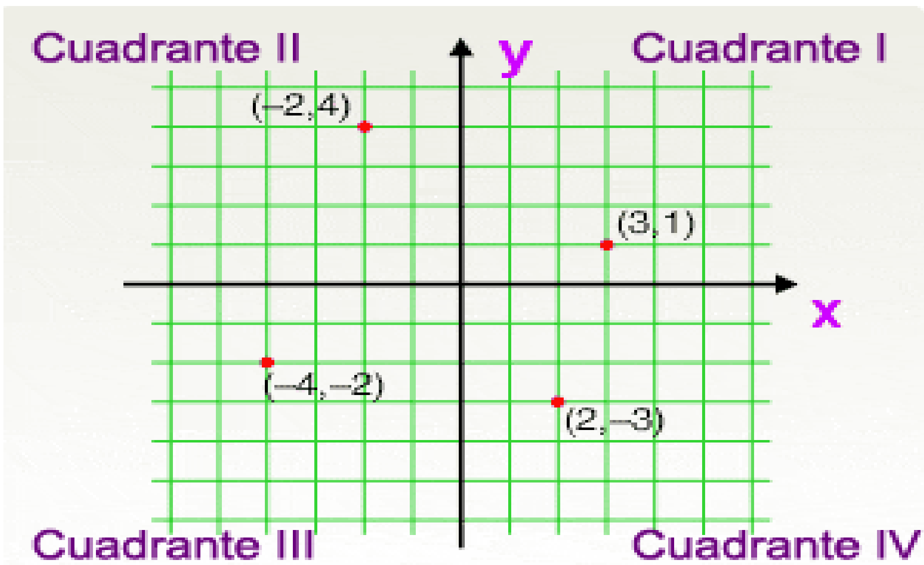


RAMON FERNANDEZ ALEJANDRO

Coordenadas Rectangulares

Las coordenadas cartesianas o coordenadas rectangulares son un tipo de coordenadas ortogonales usadas en espacios euclídeos, para la representación gráfica de una función o del movimiento o posición

Si el sistema en sí es un sistema bidimensional, se denomina **plano cartesiano**. El punto de corte de las rectas se hace coincidir con el punto cero de las rectas y se conoce como origen del sistema.

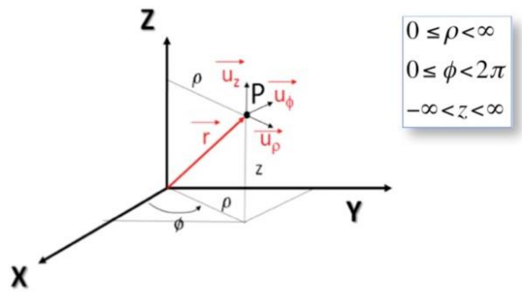


Coordenadas Cilindricas

La primera coordenada es la distancia (r) existente entre el origen y el punto, la segunda es el ángulo (φ) que forman el eje y la recta que pasa por ambos puntos, y la tercera es la coordenada (z) que determina la altura del cilindro.

SERVIN PAZ SERGIO

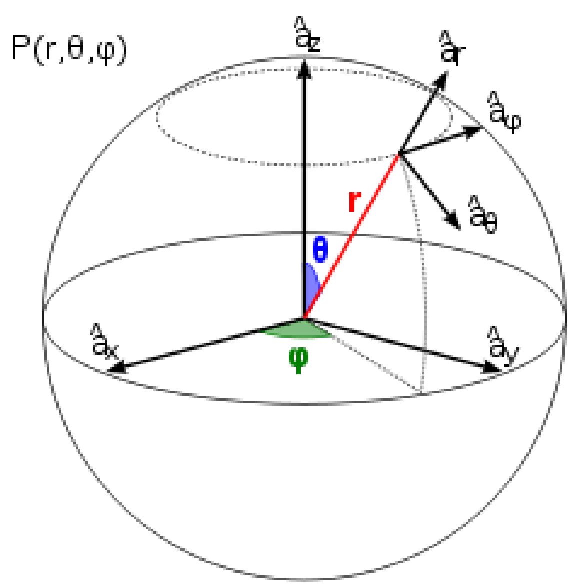
Coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z)



Las coordenadas cilíndricas r y φ son las coordenadas polares de P medidas en el plano paralelo XY que pasan por él, y las definiciones de los vectores unitarios y no cambian. La posición de P perpendicular al plano XY se mide por la coordenada z.

Coordenadas Esféricas

Se usa en espacios euclídeos tridimensionales. Este sistema de coordenadas esféricas está formado por tres ejes mutuamente perpendiculares que se cortan en el origen.



SERVIN PAZ SERGIO

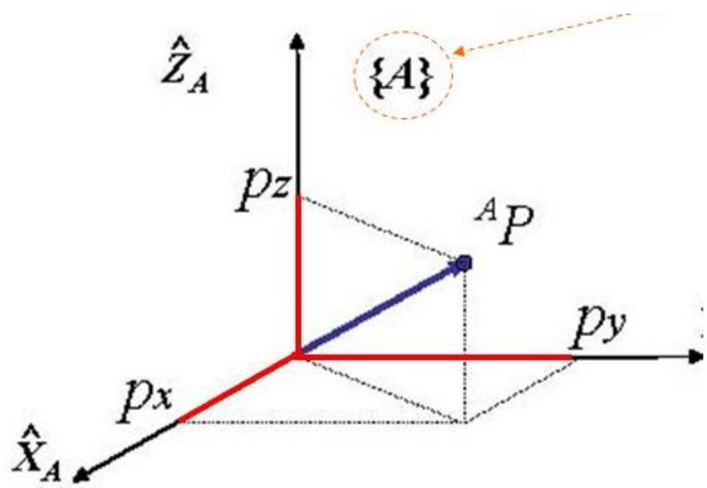
DESCRIPCIONES ESPACIALES

- Posición
- Orientación
- Ejes de referencia

Descripción de una Posición

Una vez que se establece el sistema de coordenadas, podemos ubicar cualquier punto en el universo con un versor de posición de orden de 3 x 1.

En la imagen inferior vemos un sistema de coordenadas llamado {A} con tres vectores unitarios mutuamente ortogonales.

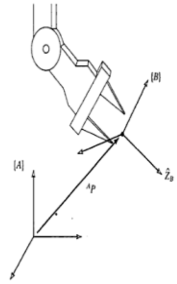


Descripción de Orientación

A menudo necesitamos representar no sólo un punto en el espacio, si no también describir la orientación de un cuerpo en el espacio.

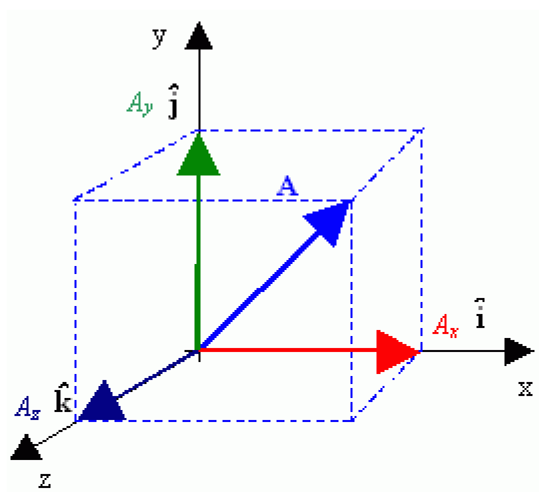
Suponiendo un robot manipulador tiene un número suficientes de articulaciones, la mano podrá orientarse arbitrariamente y al mismo tiempo podría mantenerse en el punto final en la misma posición.

SERVIN PAZ SERGIO



Descripción de Ejes de Referencia

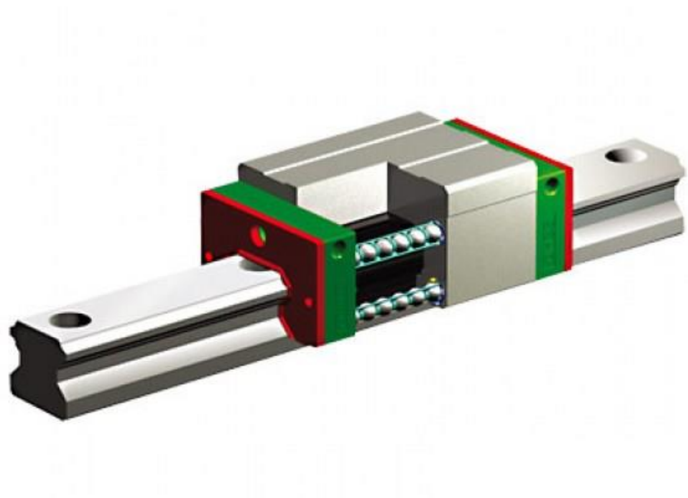
En sistema de referencia es un punto y un sistema de ejes, que suponemos fijos en el Universo, y que se toman como referencia para medir la distancia a la que se encuentra el objeto. Entre los puntos que forman el sistema de referencia hay que destacar el origen de coordenadas (O). Es el punto donde se cruzan los ejes de coordenadas. Es el punto de origen de las medidas por lo que le corresponden las coordenadas (0).



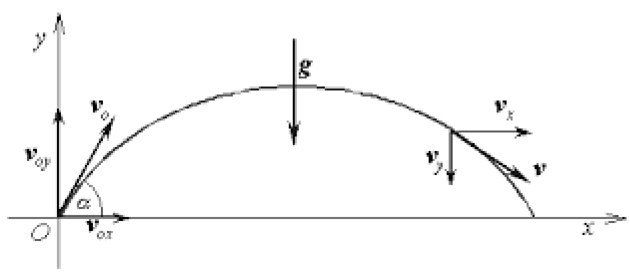
Se utilizan tres sistemas de referencia, dependiendo de las dimensiones necesarias para describir el movimiento:

- Una dimensión - Movimientos Lineales

SERVIN PAZ SERGIO

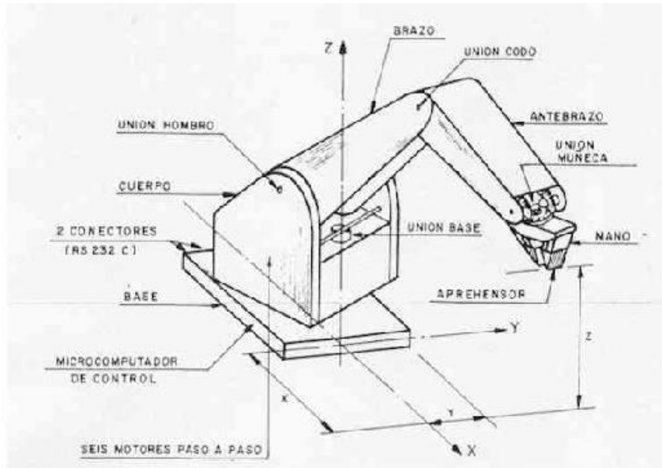


Dos dimensiones - Movimientos en el Plano



Tres dimensiones - Movimientos en el Espacio

SERVIN PAZ SERGIO



SERVIN PAZ SERGIO

Movimiento rígido y transformaciones homogéneas

Se define transformación como un conjunto de modificaciones que se aplican a un modelo en tres dimensiones, de modo que sea posible su representación en una pantalla bidimensional.

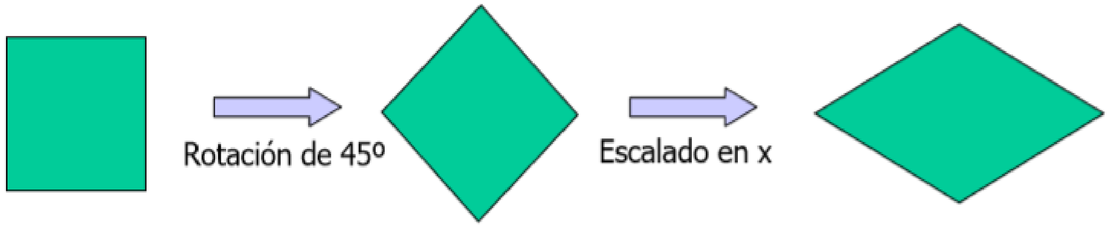
Las operaciones básicas que permiten realizar las transformaciones sobre los objetos se pueden dividir en tres: rotaciones alrededor de los ejes de coordenadas, traslaciones y cambios de posición y escalado o cambios en las dimensiones de los objetos.

Composición de Transformaciones

Rotación

•El escalado, la traslación y la rotación son transformaciones lineales, ya que los nuevos puntos se calculan a partir de combinaciones lineales de las componentes de los puntos originales.

•Cada transformación vendrá representada por una sola matriz, que se obtendrá multiplicando las matrices de cada una de las transformaciones, y en el mismo orden en el que queremos que se apliquen.



Propiedades de las rotaciones

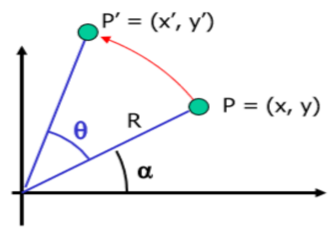
ROTACION

Es el movimiento de cambio de orientación de un solido extenso de forma que dado un punto cualquiera de el mismo este permanece a una distancia constante de el eje de rotación.

Rotación con respecto al origen

•La posición de un punto es rotada alrededor del origen de coordenadas.

•¿Cómo sacamos la fórmula para obtener P' a partir de P y del ángulo?



Solución: expresándolo en polares

$$\begin{cases} x = R\cos\alpha \\ y = R\sin\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = R\cos(\alpha+\theta) = \ldots = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = R\sin(\alpha+\theta) = \ldots = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

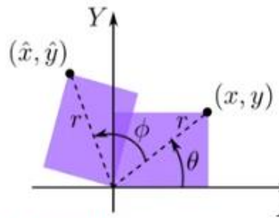
- En forma matricial:

$$P = (x, y) \qquad P' = (x', y') \qquad R = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\boxed{P' = P \cdot R}$$

Matrices y

rotación



$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ \hat{x} &= r\cos(\theta+\phi) \\ \hat{x} &= r(\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi) \\ \hat{x} &= r\cos\theta\cos\phi - r\sin\theta\sin\phi \\ \hat{x} &= x\cos\phi - y\sin\phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= r\sin\theta \\ \hat{y} &= r\sin(\theta+\phi) \\ \hat{y} &= r(\sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi) \\ \hat{y} &= r\sin\theta\cos\phi + r\cos\theta\sin\phi \\ \hat{y} &= y\cos\phi + x\sin\phi \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M_r} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

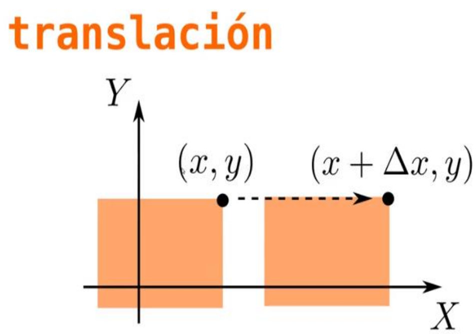
igualdades trigonométricas

$$\cos(\theta+\phi) = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi$$
$$\sin(\theta+\phi) = \sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi$$

TRASLACION

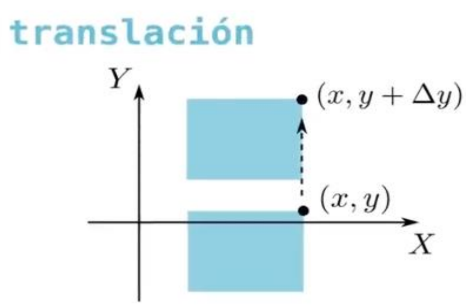
Es un movimiento en el plano de tal forma que a cada punto de la figura le corresponde un vector de traslación (una distancia, una dirección y un sentido de la traslación).

Matrices y transformaciones



$$\begin{pmatrix} x+\Delta x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M_{tx}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

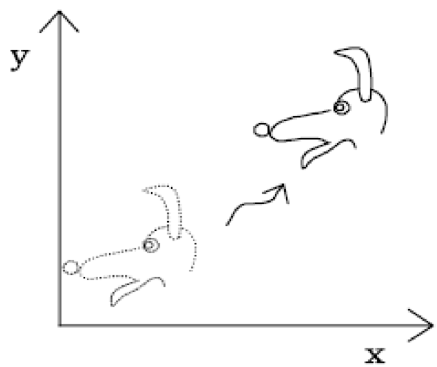
Matrices y transformaciones

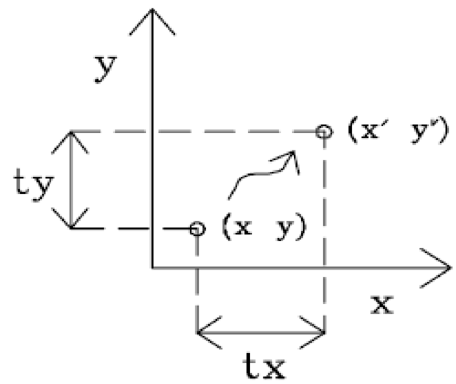


$$\begin{pmatrix} x \\ y+\Delta y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y+\Delta y \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M_{ty}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Traslación

- La transformación de translación consiste en mover una cierta distancia un objeto en una dirección determinada, como consecuencia el objeto se encontrará en una posición nueva.
- En realidad, son los puntos que definen el objeto los que se trasladan de forma individual. Para trasladar un objeto que se representa como un conjunto de polígonos, se trasladan cada uno de los vértices de los polígonos que lo componen y a continuación se redibujan dichos polígonos en la nueva ubicación.





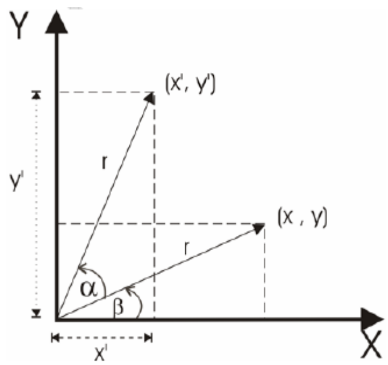
En 3D, el sistema de referencia homogéneo tendrá 4 dimensiones, por lo que la traslación del punto V = (x, y, z, 1) quedará indicada como V' = (x', y', z', 1) = (x, y, z, 1)·T, siendo T,

La matriz de traslación en 3D. (*tx*, *ty*, *tz*) se conoce como el *vector de traslación*. La expresión anterior es equivalente al sistema de ecuaciones

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ t_x & t_y & t_z & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x' &= x + t_x \\ y' &= y + t_y \\ z' &= z + t_z \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

GIROS EN 2D

- Puesto que se ha de establecer el sentido de giro, vamos a suponer que el giro alrededor de un eje ortogonal será positivo, cuando sea contrario al sentido de giro de las agujas del reloj, mirando cada eje de coordenadas desde fuera hacia el origen. Así, un giro positivo alrededor del eje Z de un punto (P) situado
- inicialmente en las coordenadas (X, Y, Z), y que luego se ha girado un ángulo α, pasando a estar ahora en las coordenadas (X', Y', Z'). La coordenada Z no varía
- por lo tanto Z' = Z.



$$M_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & sin\theta & 0 \\ 0 & -sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ Matriz de rotación alrededor del eje } x$$

$$M_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ Matriz de rotación alrededor del eje } y$$

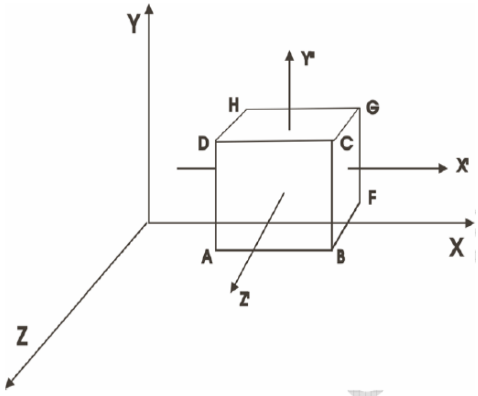
$$M_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & sin\theta & 0 & 0 \\ -sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ Matriz de rotación alrededor del eje } z$$

Donde α representa el ángulo de rotación y la posición resultante del punto rotado será P2=(x2,y2,z2).

Giros relativos respecto a ejes paralelos a los ejes de coordenadas.

- Antes de abordar la situación general para cualquier eje de coordenadas, se va a estudiar un caso relativamente sencillo y que servirá a la hora de generalizar a cualquier eje, es el caso de las rotaciones respecto a ejes paralelos al eje de coordenadas.
- Para comprender mejor cómo se efectúan estos giros se tomará como ejemplo la siguiente figura, donde se muestra un objeto en un sistema de referencia local *X', Y', Z'*, cuyo eje *X'* es paralelo al

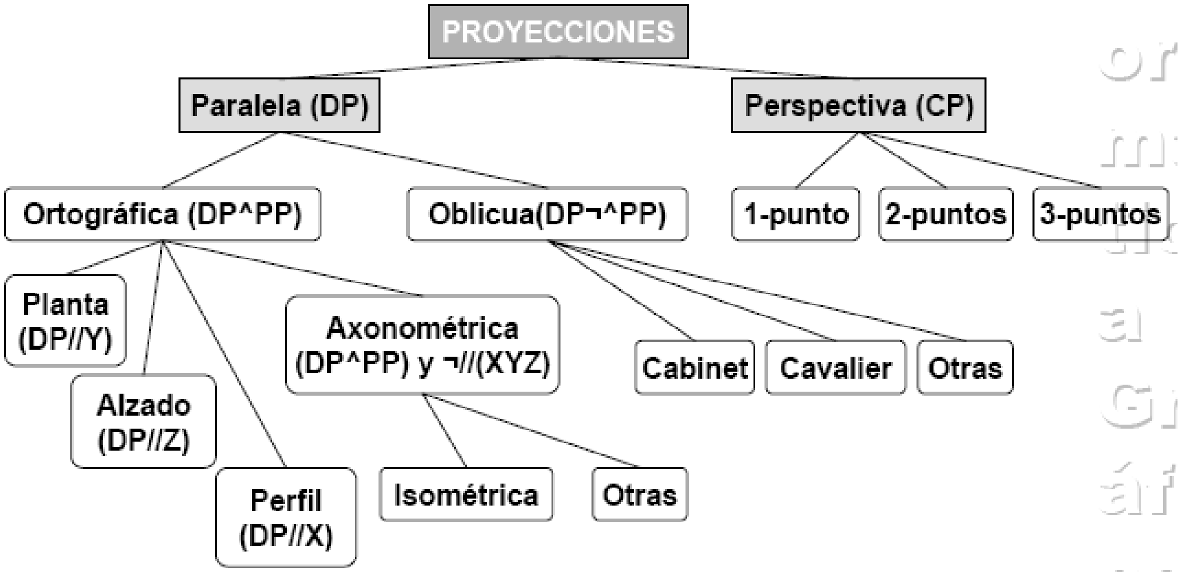
eje *X* del sistema de coordenadas global. Para girar el objeto entorno a *X’* se ha de proceder como sigue:



Proyecciones

- El proceso de visión en tres dimensiones es mas complejo que en dos dimensiones, en dos dimensiones solamente seria necesario definir una ventana y un marco, si embargo en tres se debe realizar una transformación de tres a dos dimensiones llamada proyección.
- Existen dos métodos principales de proyección capaces de generar vistas de los objetos sólidos (tridimensionales):
- - Proyección paralela
  - Proyección perspectiva

En la siguiente figura se muestran las relaciones entre los distintos tipos de proyecciones.



Transformaciones 3D

- Nos movemos en un mundo 3D
- • Se debe permitir trabajar directamente con objetos 3D
- Sin embargo al final siempre habrá que generar una image 2D en pantalla
- • Las transformaciones son las mismas que antes, añadiendo una tercera componente
- – traslaciones – rotaciones
  – escalados

Sistemas de Coordenadas

- Una escena 3D se define por los puntos, líneas y planos que la componen

- Necesitamos un sistema para poder referenciar las coordenadas, al igual que ocurría en 2 dimensiones
- Z (2,0,0)
- Hace falta un tercer eje, Z, perpendicular al X y al Y
- (2,0,0)
- Cualquier punto se describe entonces como una terna de valores (x, y, z)
- Para el sentido del eje Z se usa la regla de la mano derecha
- Son extensiones de las transformaciones en dos dimensiones
- En el caso 2D teníamos inicialmente matrices 2x2, pero eso sólo nos permitía operaciones del tipo