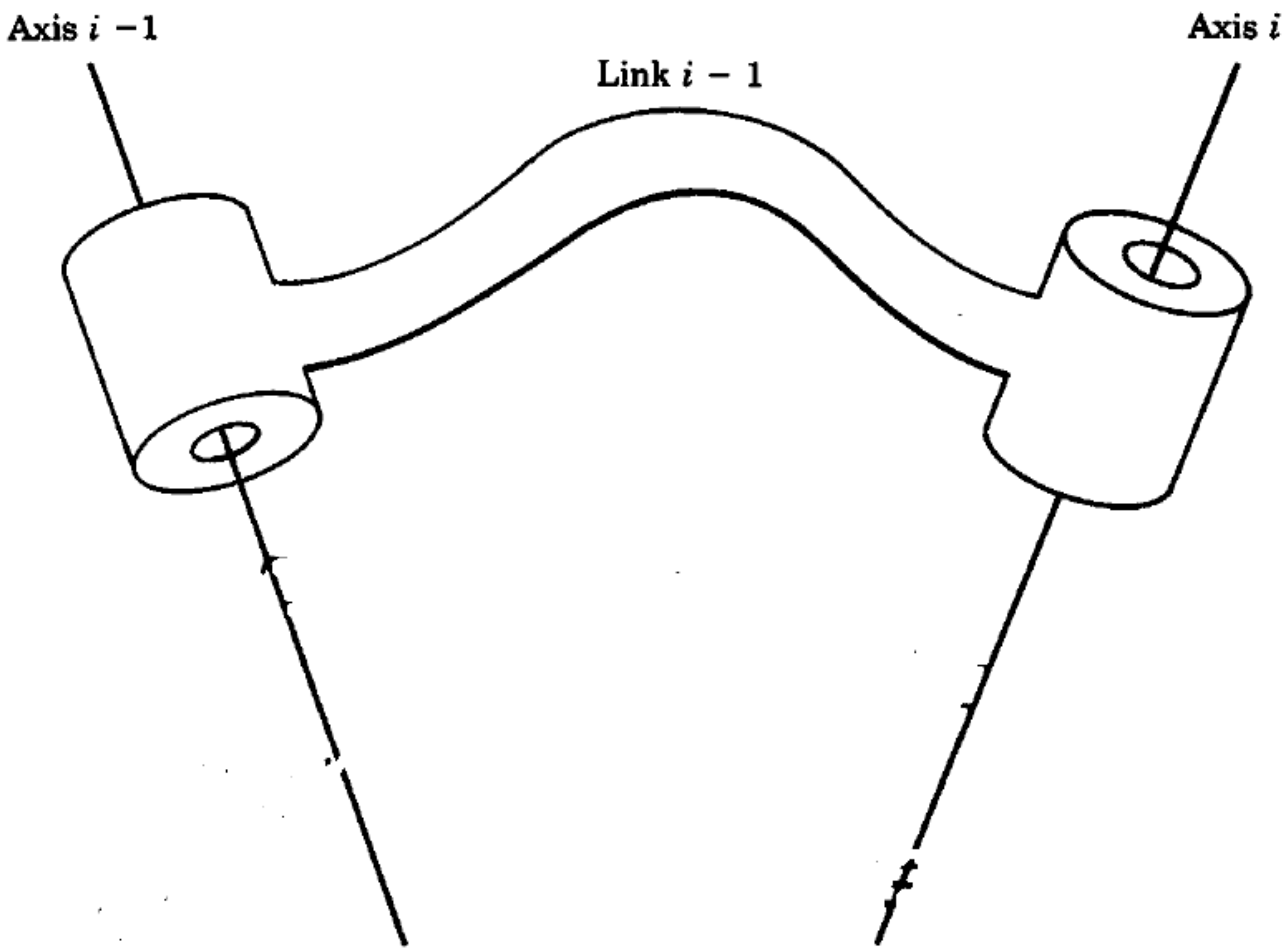
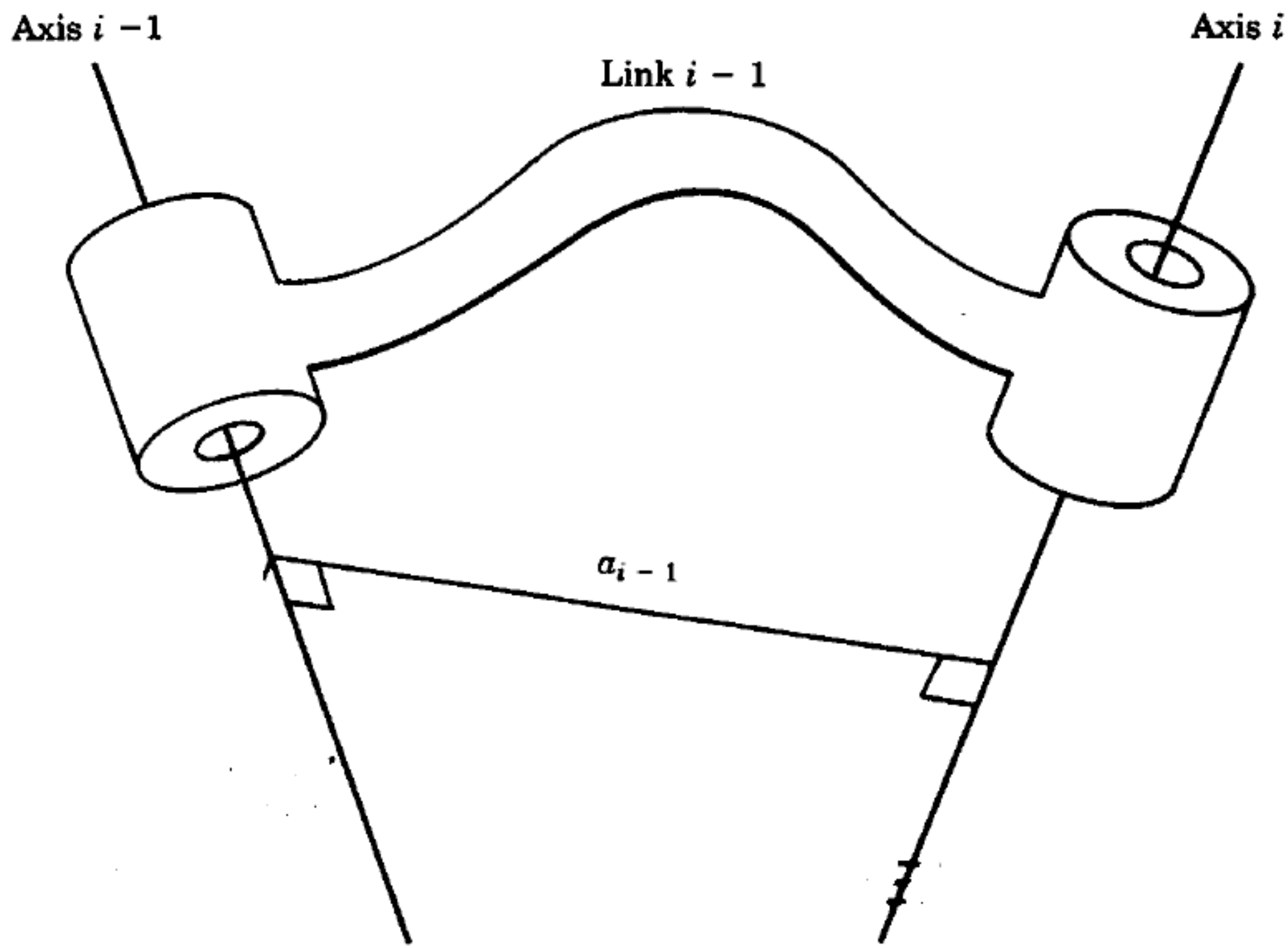
Problema Cinemático Directo

Parámetros Denavit-Hartenberg

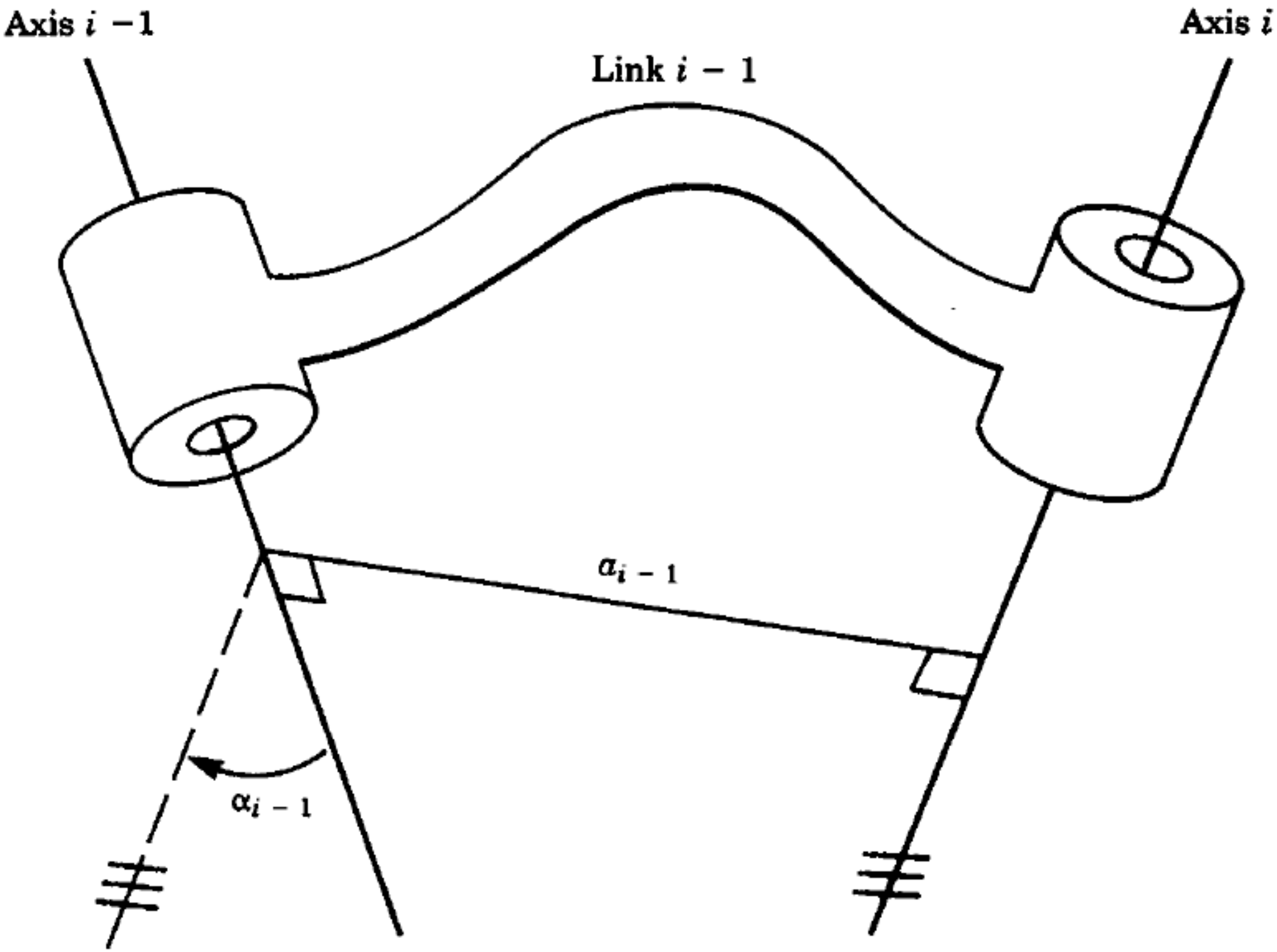
Denavit-Hartenberg notación Craig



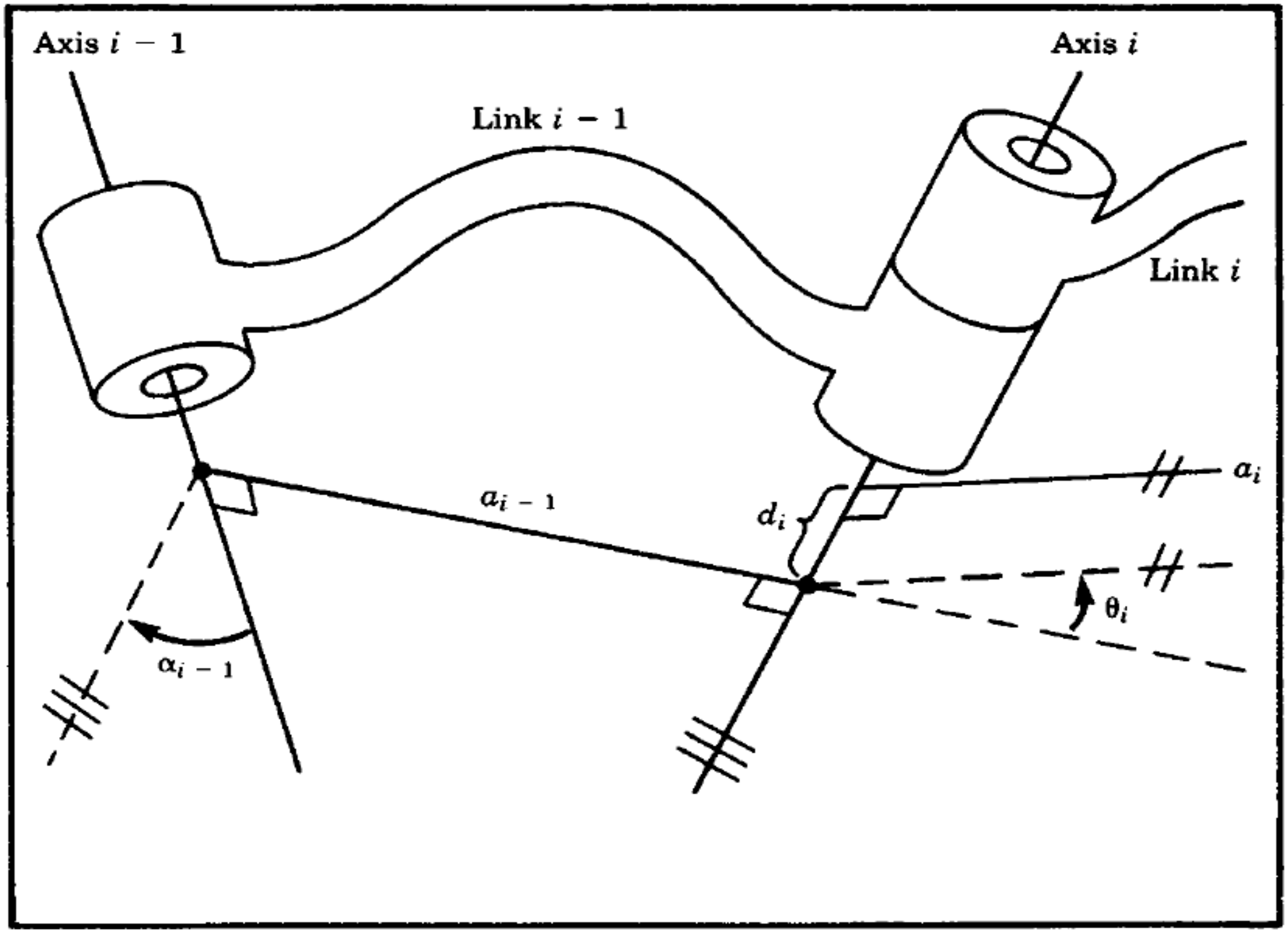
Denavit-Hartenberg notación Craig



Denavit-Hartenberg notación Craig

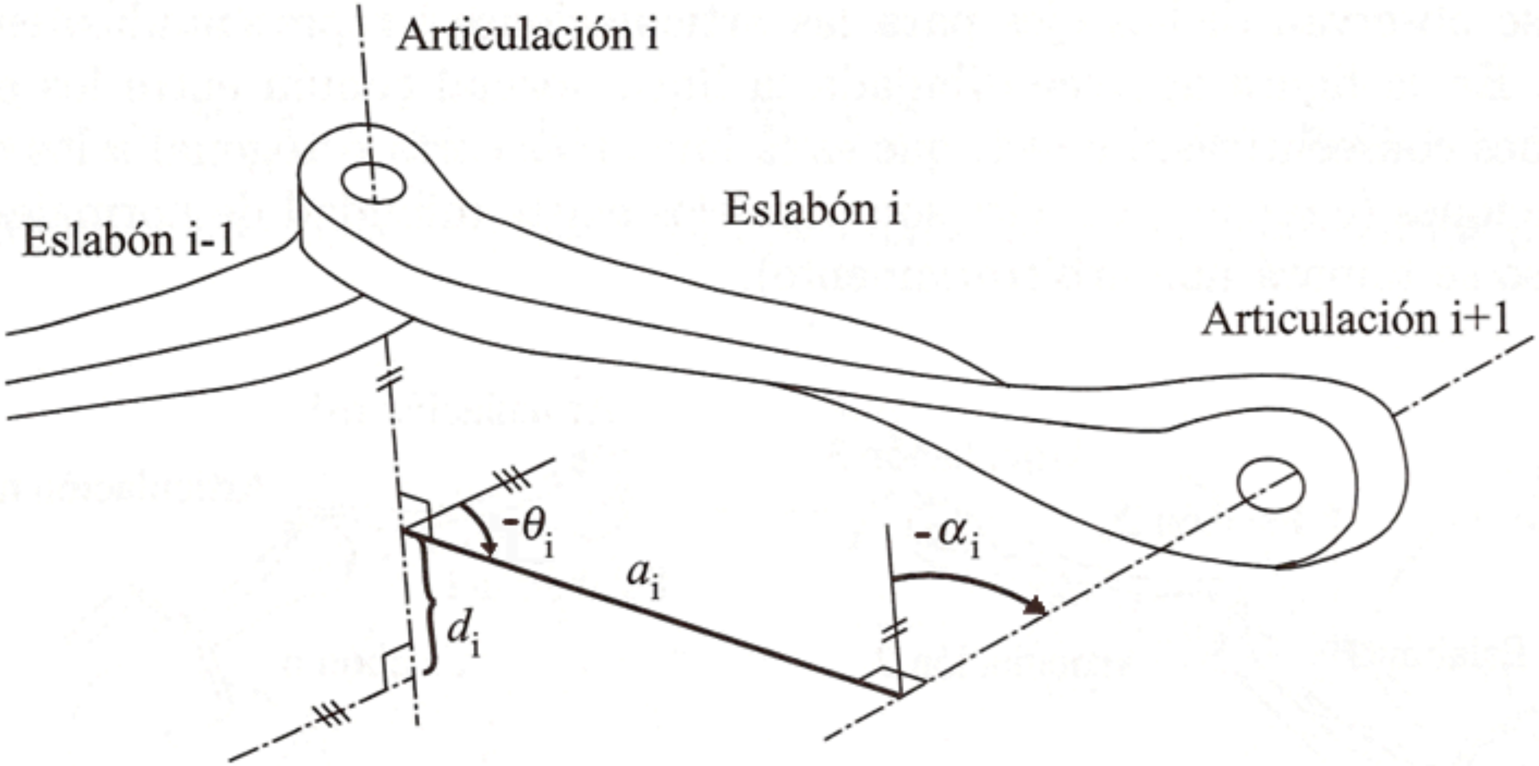


Denavit-Hartenberg notación Craig



Denavit-Hartenberg notación Paul

a_i:*(longitud eslabón)* distancia entre ejes i, i+1 de las articulaciones a lo largo de la perp. común
α_i:*(ángulo torsión)* ángulo que existiría entre ejes i,i+1 si se cortasen en punto de corte de la perp común
θ_i:ángulo existiría entre las líneas normales de la articulación i si se cortasen en el mismo punto del eje i
d_i:distancia entre las intersecciones de las normales comunes al eje i, medida a lo largo de i



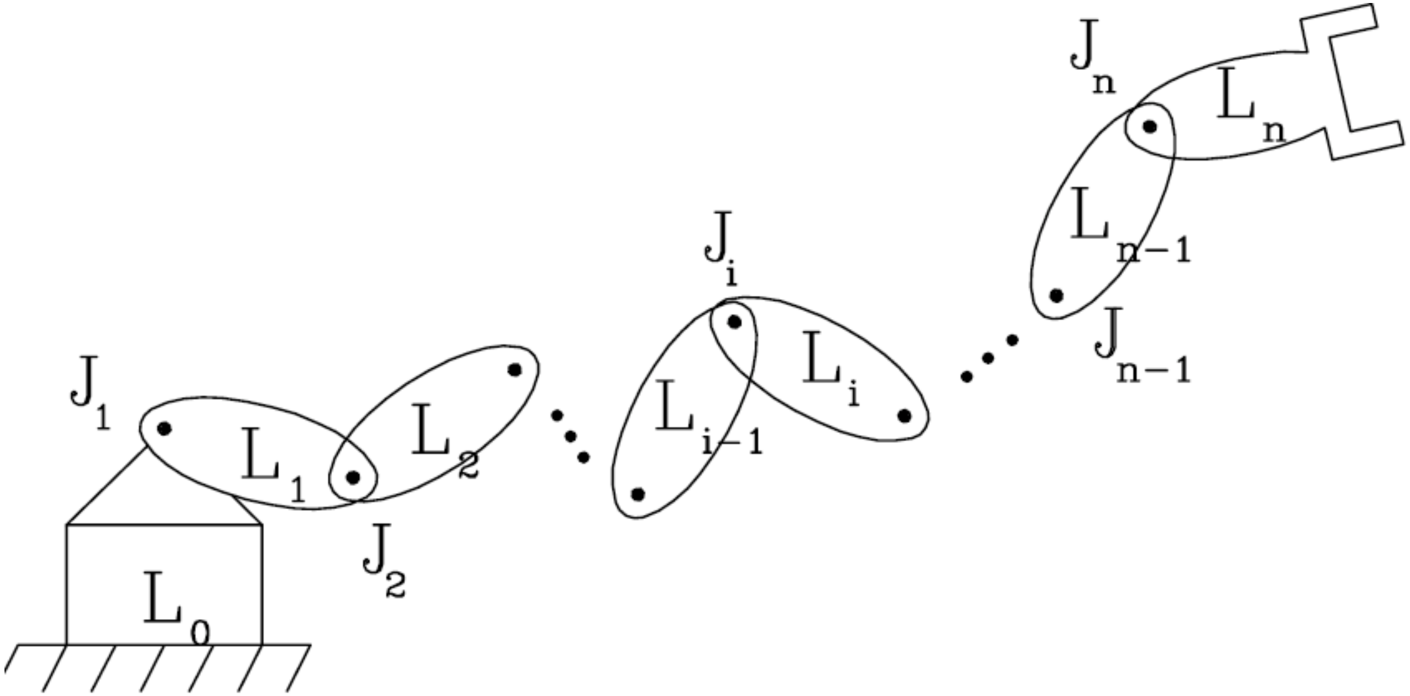
Parámetros Denavit-Hartenberg notación Paul

- 4 parámetros: $a_{i,}$ $\alpha_{i,}$ $\theta_{i,}$ d_i
  - 2 relativos a la forma y tamaño del eslabón
    - $a_{i,}$ α_i
  - 2 describen posición relativa del eslabón respecto a su predecesor *
    - $\theta_{i,}$ d_i
- Los parámetros de forma y tamaño quedan determinados en tempo de diseño
- Los parámetros de posición relativa varían
  - Θ_i variable si la rotación es articular (d_i cte.)
  - d_i variable si la rotación es prismática (Θ_i cte.)

* En notación Craig es respecto al eslabón sucesivo $a_{i-1,}$ $\alpha_{i-1,}$ $\theta_{i,}$ d_i

Asignación Sistemas de Referencia

- **Objetivo**: Resolver el PROBLEMA CINEMÁTICO DIRECTO:
  - •Encontrar una transformación homogénea (función de los parámetros vistos) que describa la posición y orientación del extremo del robot respecto a la base.

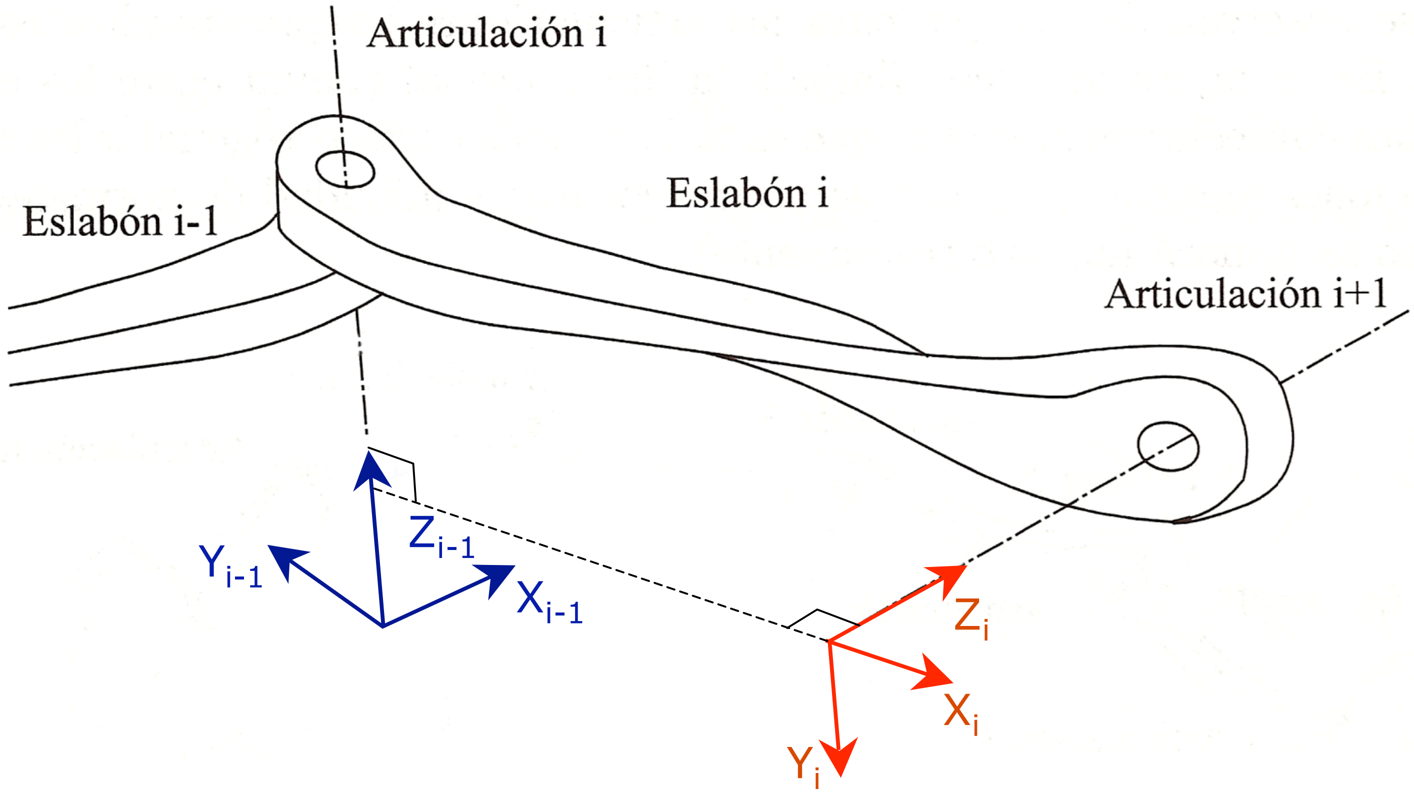


Asignación Sistemas de Referencia

- **Método**:Definir SR asociado a cada eslabón, realizar la transformación entre dos consecutivos con solo 2 giros y 2 traslaciones
- La asignación de SR no es única:
  - e.g: Notación Paul, notación Craig
  - [Paul]: SRi en el eje que le enlaza con el siguiente eslabón (al final del eslabón)
  - [Craig]: SRi en el eje que le enlaza con el eslabón precedente (al inicio del eslabón)
  - Las matrices de transformación intermedias varían , pero el resultado final es el mismo!

Asignación Sistemas de Referencia

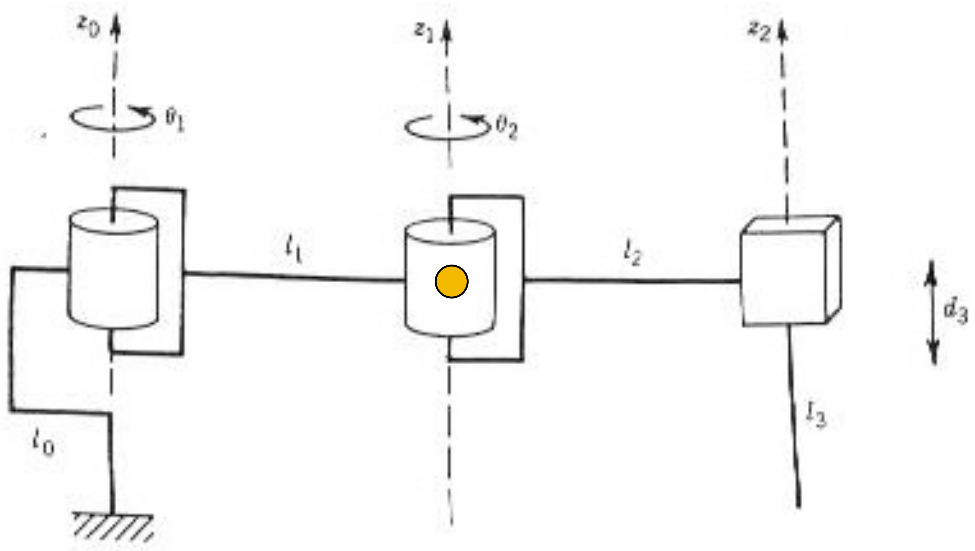
1.- El eje $\mathbf{z_i}$ del SR del eslabón i en eje de la articulación i+1.
2.- El eje $\mathbf{x_i}$ es normal común a ejes i, i+a , apuntando de i a i+1 *
3.- El eje $\mathbf{y_i}$ trivialmente para que el sistema sea dextrogiro



* La normal común puede no ser única, necesitamos establecer convenciones

Asignación Sistemas de Referencia: Convenciones x_i

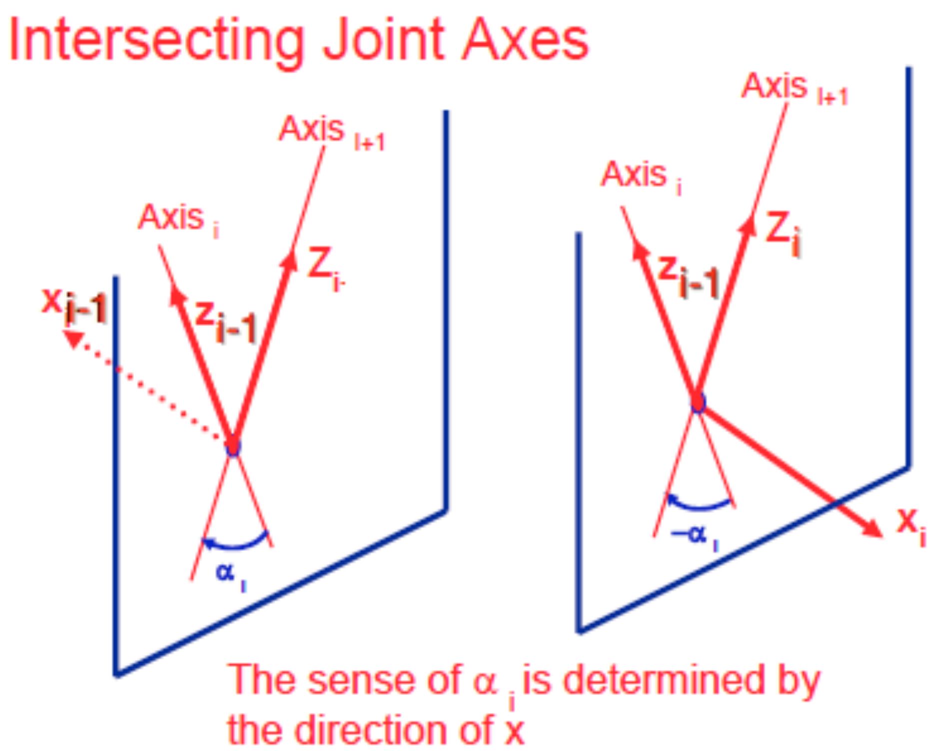
Si las articulaciones i, i+a son paralelas:



- Tenemos infinitas posibles perpendiculares comunes
- El origen del sistema de referencia queda indefinido
  ->Tomar origen en la articulación i+1

Asignación Sistemas de Referencia: Convenciones x_i

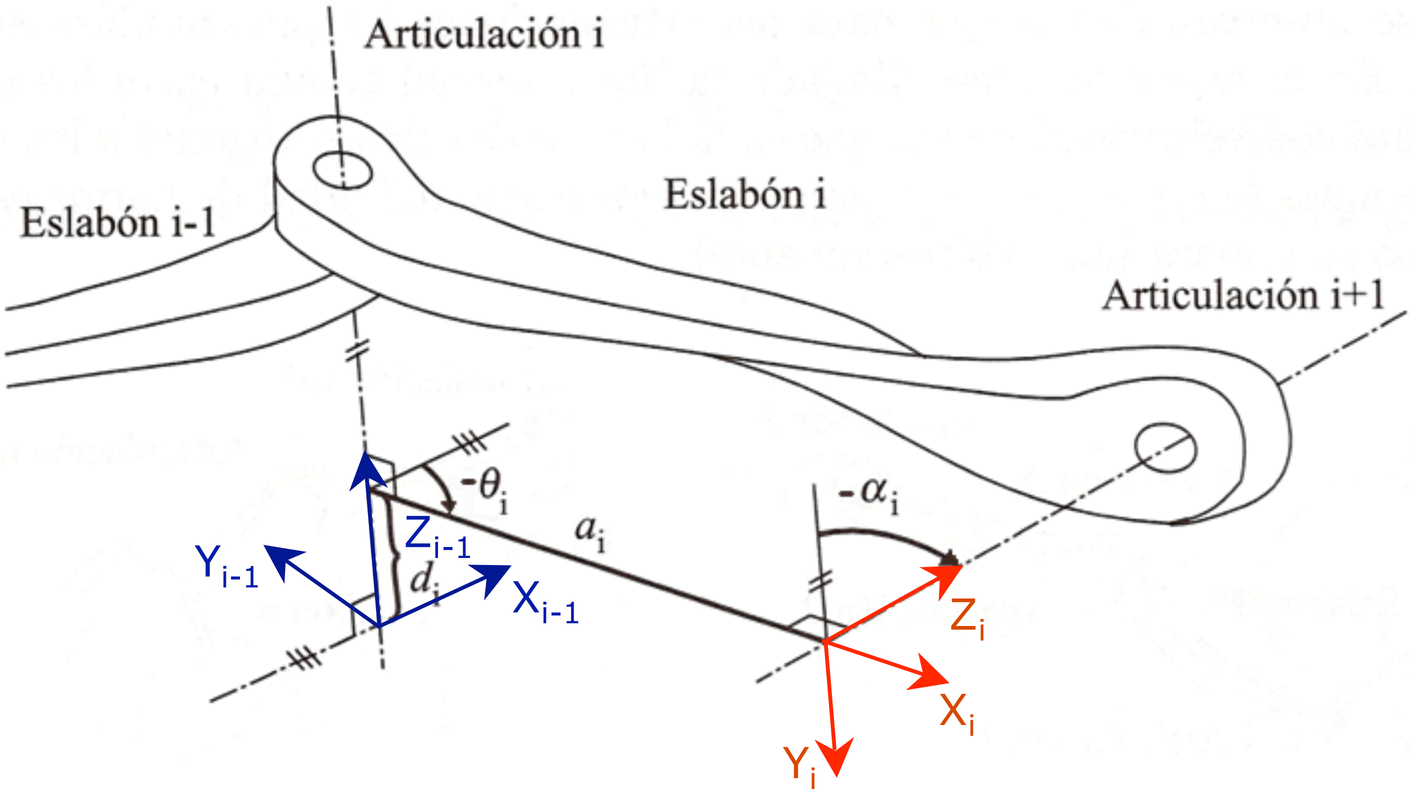
Si las articulaciones se cortan en un punto



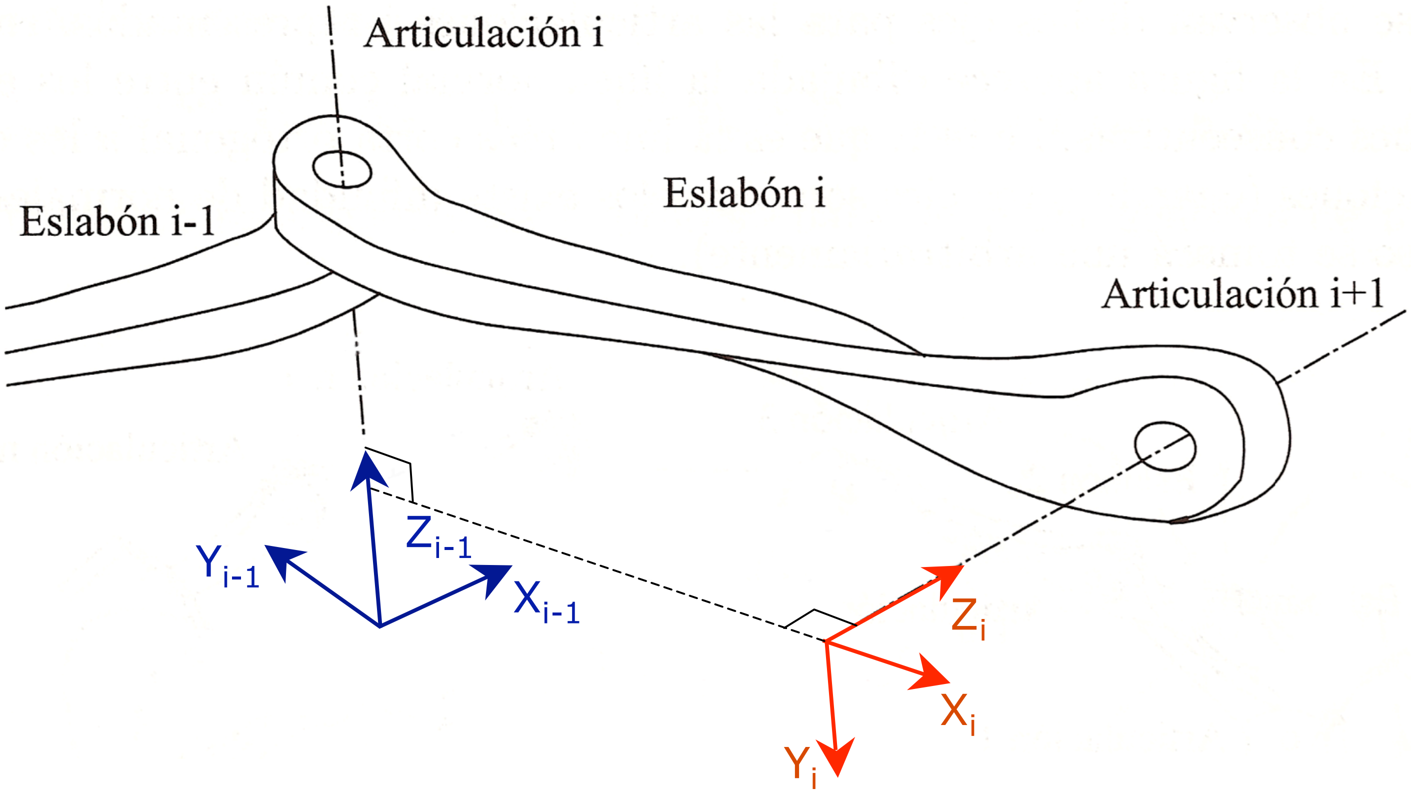
a_i ? 0

- El origen en el punto de corte
- La dirección es perpendicular común al plano formado por $\mathbf{z_{i-1}}$, $\mathbf{z_i}$
- El sentido se toma arbitrariamente

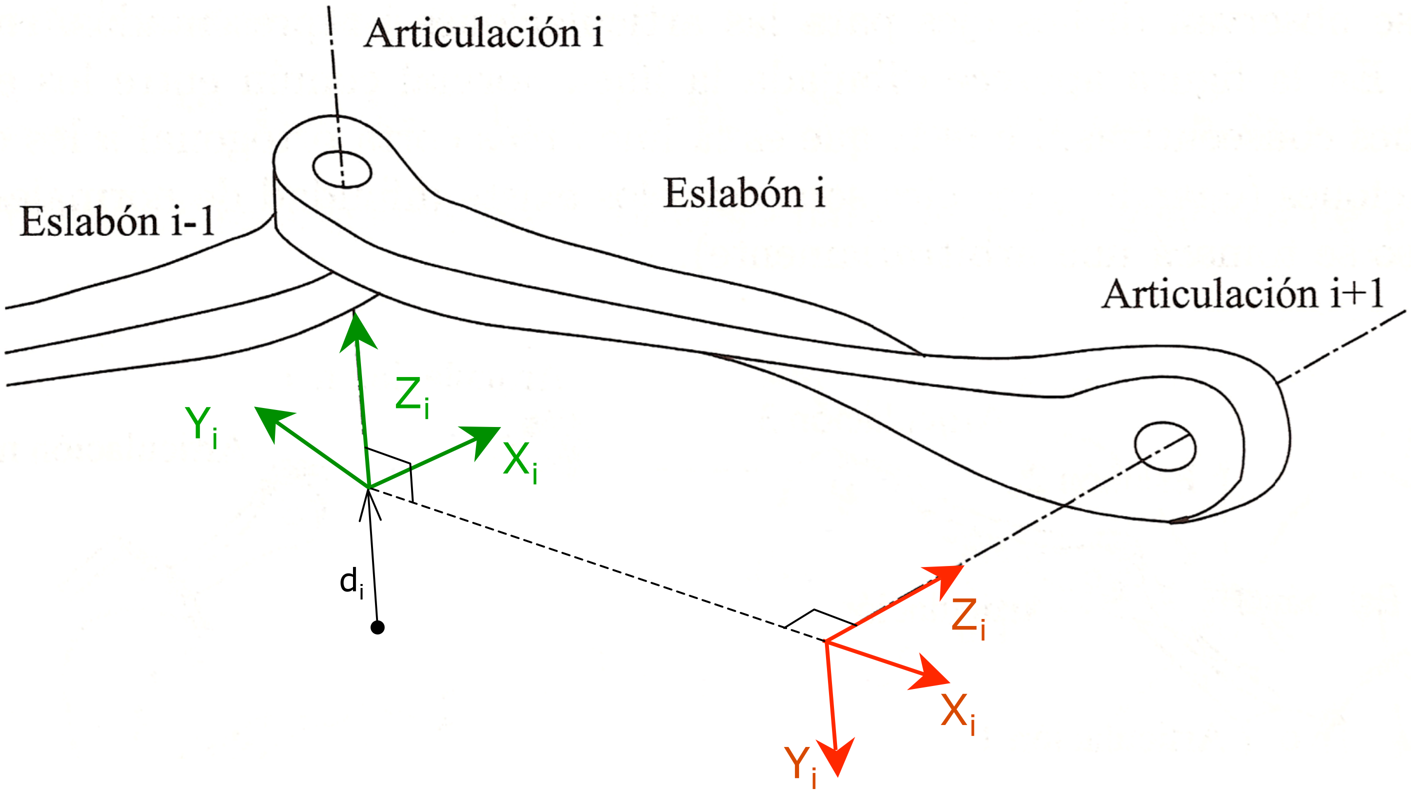
Denavit-Hartenberg: Representación



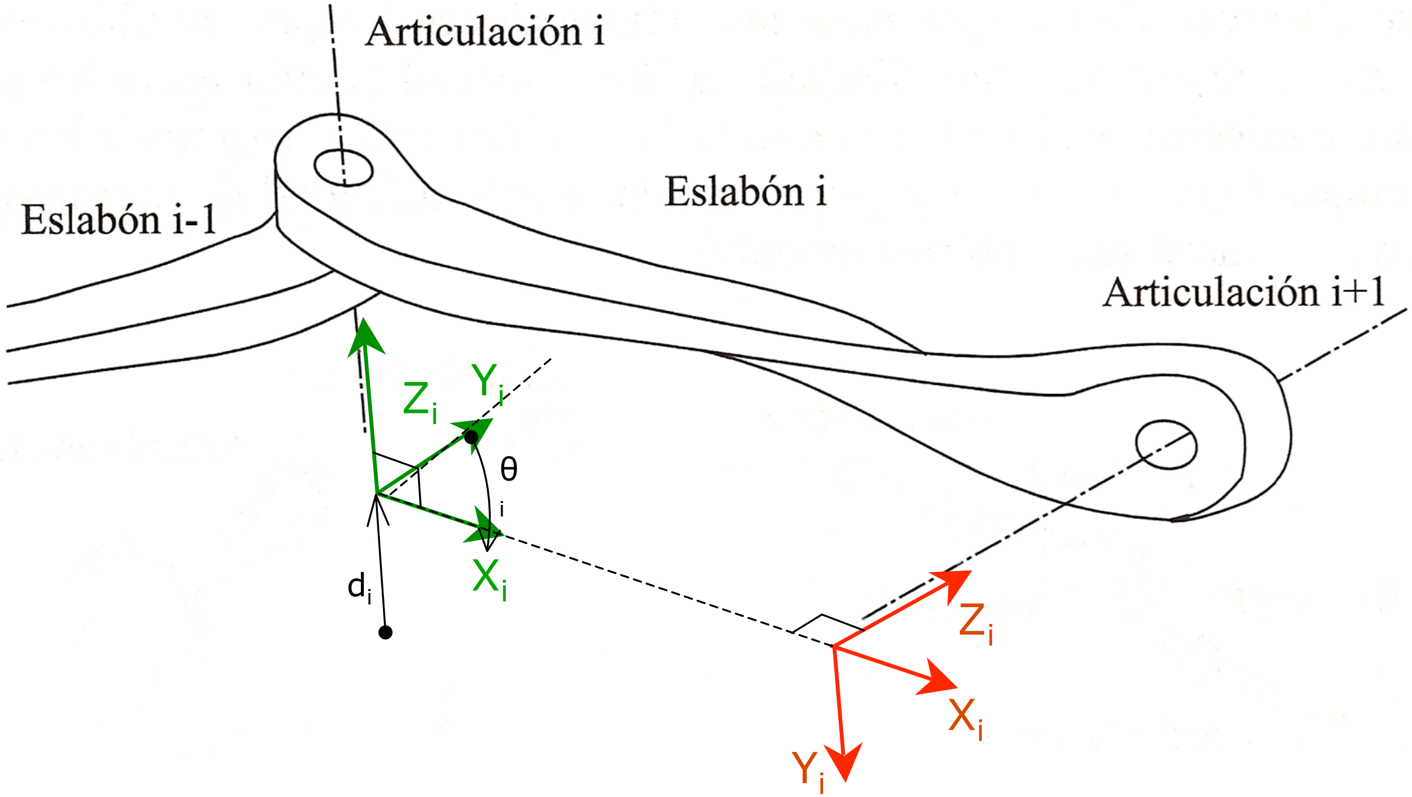
Denavit-Hartenberg: Representación



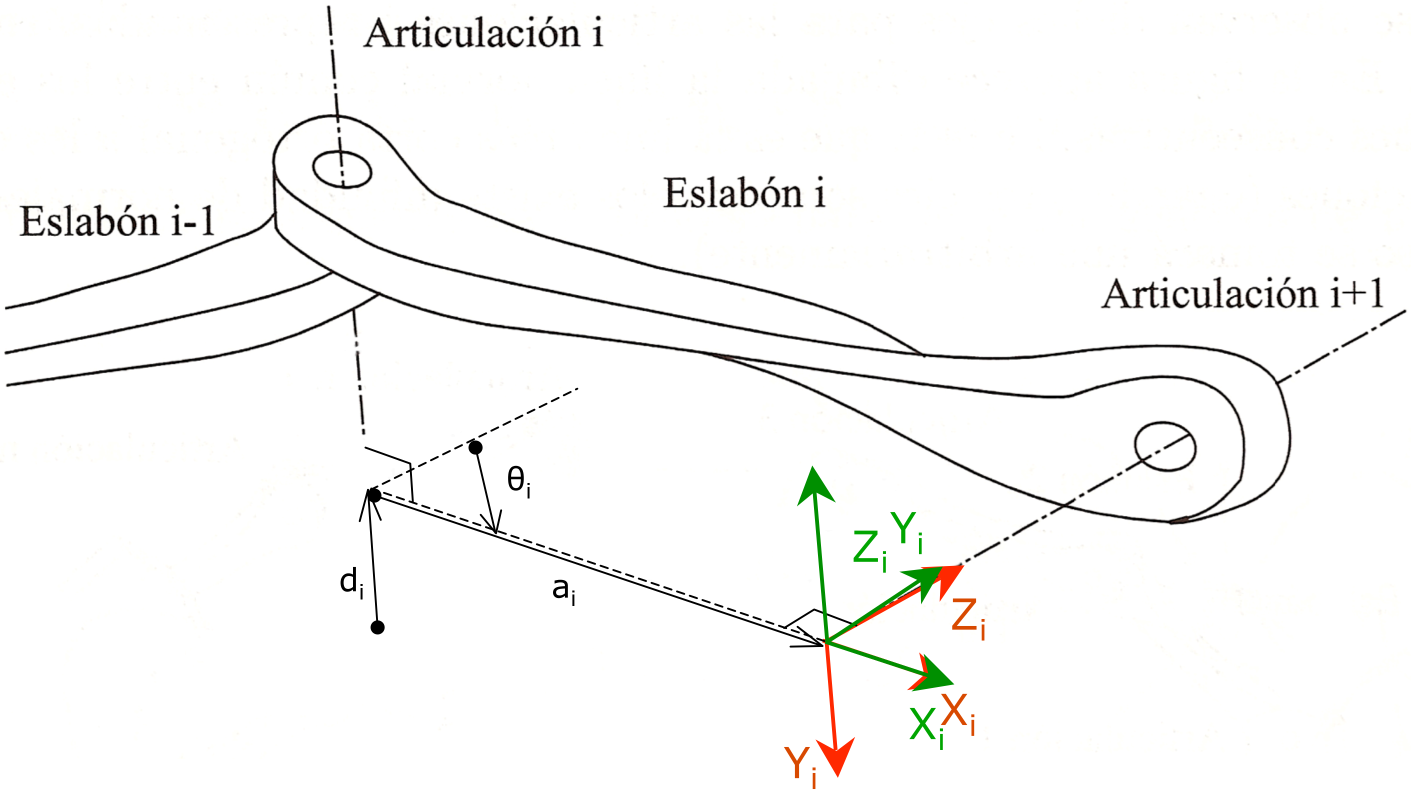
Denavit-Hartenberg: Representación



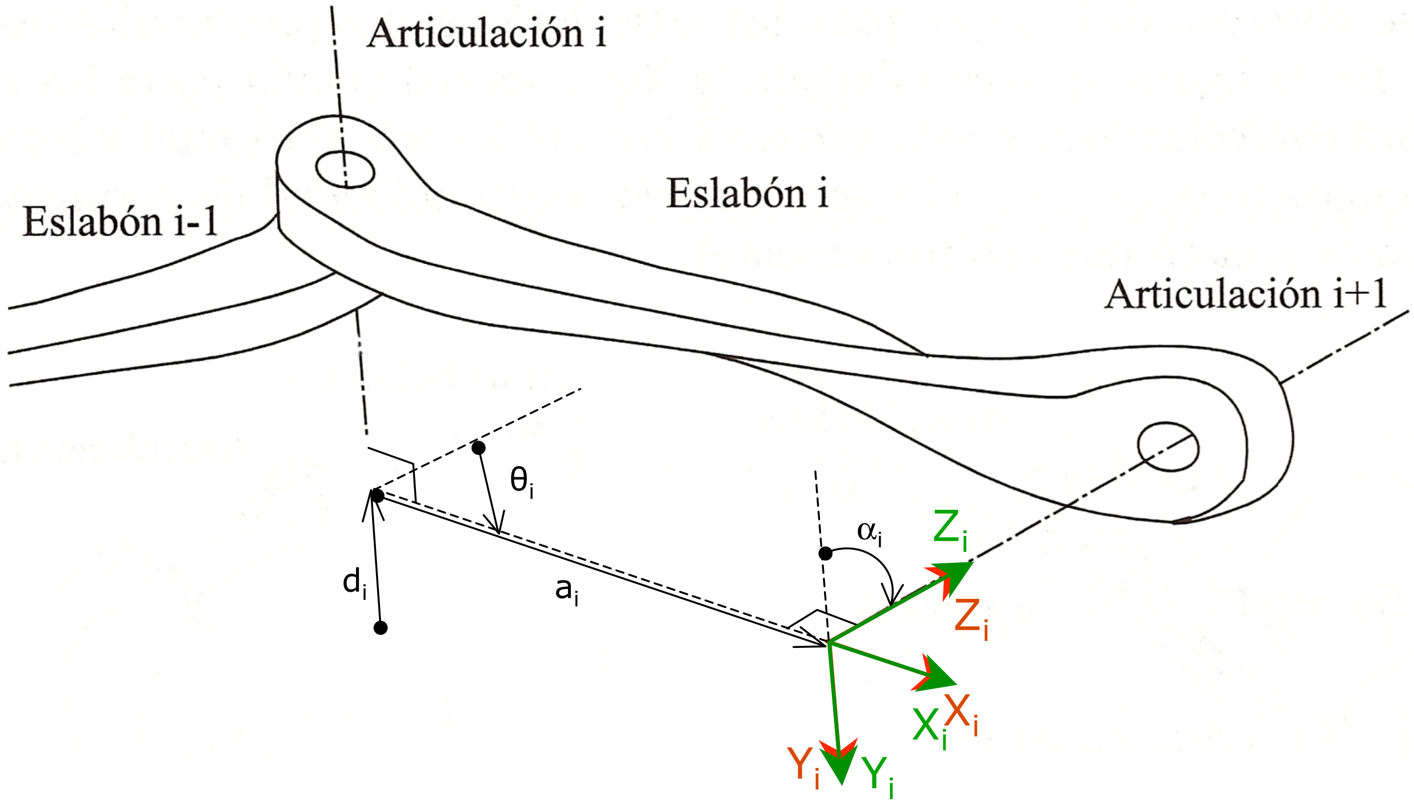
Denavit-Hartenberg: Representación



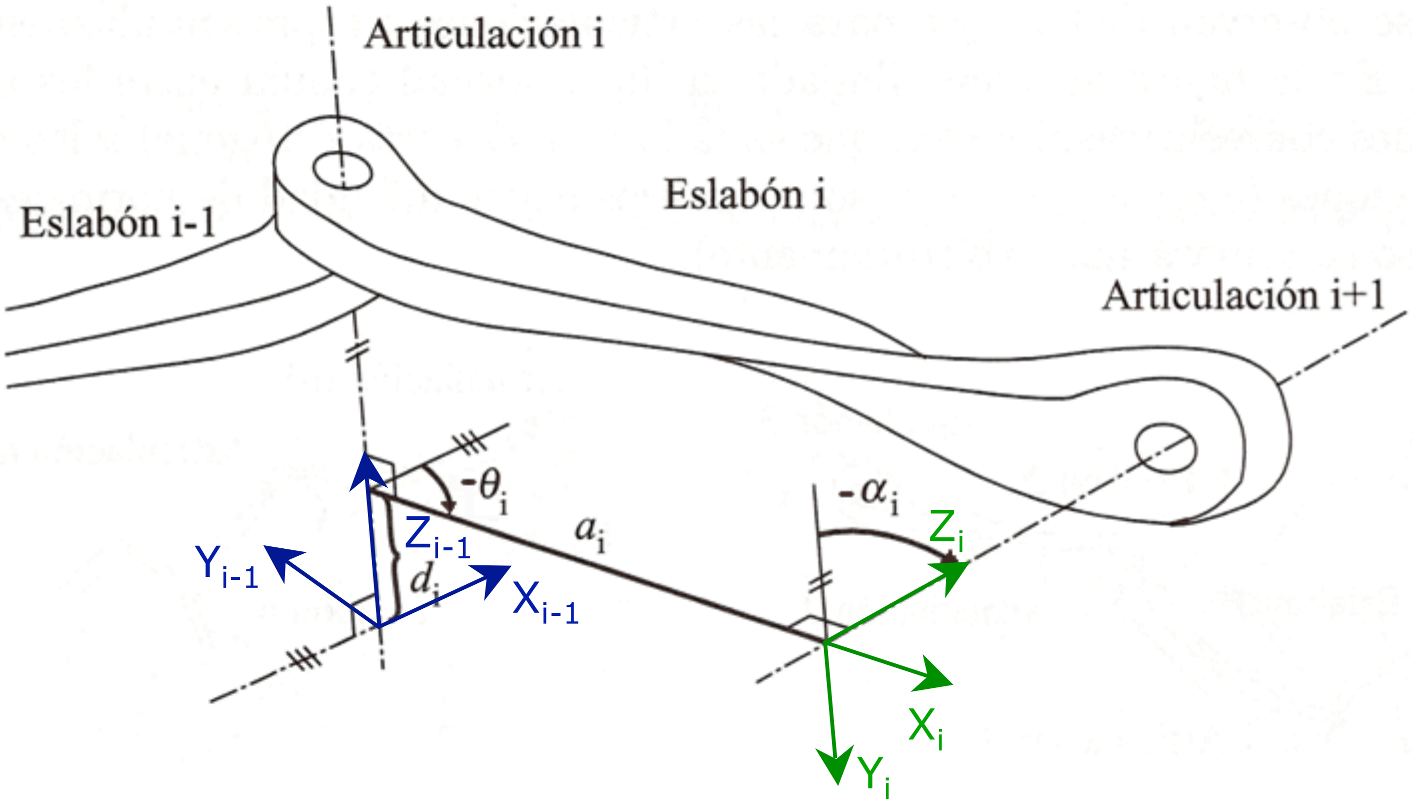
Denavit-Hartenberg: Representación



Denavit-Hartenberg: Representación

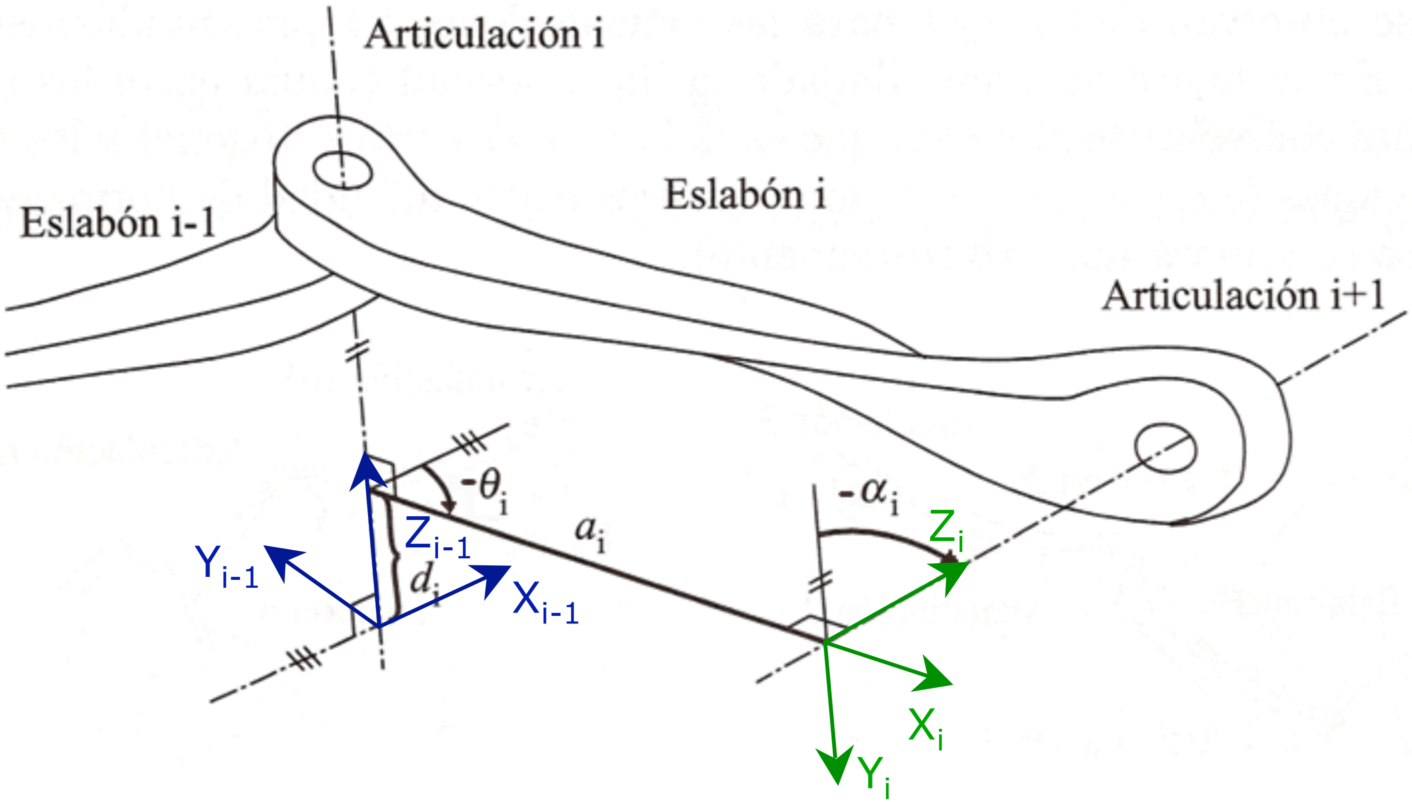


Denavit-Hartenberg: Representación



Denavit-Hartenberg: Representación

$$^{i-1}A_i = T_{z,d} T_{z,\theta} T_{x,a} T_{x,\alpha}$$



Denavit-Hartenberg: Representación

$$^{i-1}A_i = T_{z,d}T_{z,\theta}T_{x,a}T_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\cos\alpha_i \operatorname{sen}\theta_i & \operatorname{sen}\alpha_i \operatorname{sen}\theta_i & a_i\cos\theta_i \\ \operatorname{sen}\theta_i & \cos\alpha_i\cos\theta_i & -\operatorname{sen}\alpha_i\cos\theta_i & a_i \operatorname{sen}\theta_i \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Denavit-Hartenberg: Representación

$$^{i-1}A_i = T_{z,d}T_{z,\theta}T_{x,a}T_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\cos\alpha_i \operatorname{sen}\theta_i & \operatorname{sen}\alpha_i \operatorname{sen}\theta_i & a_i\cos\theta_i \\ \operatorname{sen}\theta_i & \cos\alpha_i\cos\theta_i & -\operatorname{sen}\alpha_i\cos\theta_i & a_i \operatorname{sen}\theta_i \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como es sabido, la inversa es la transpuesta

$$^{i}A_{i-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & \operatorname{sen}\theta_i & 0 & -a_i \\ -\cos\alpha_i \operatorname{sen}\theta_i & \cos\alpha_i\cos\theta_i & \operatorname{sen}\alpha_i & -d_i \operatorname{sen}\alpha_i \\ \operatorname{sen}\alpha_i \operatorname{sen}\theta_i & -\operatorname{sen}\alpha_i\cos\theta_i & \cos\alpha_i & -d_i\cos\alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Denavit-Hartenberg: Representación

$$
\begin{aligned}
A_i &= R_{z,\theta_i}\text{Trans}_{z,d_i}\text{Trans}_{x,a_i}R_{x,\alpha_i} \qquad (3.10)\\
&= \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} & 0 & 0 \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{\alpha_i} & -s_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i}c_{\alpha_i} & s_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i c_{\theta_i} \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i}c_{\alpha_i} & -c_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i s_{\theta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

NOTA: Las operaciones $T_{z,d}T_{z,\theta}$ y $T_{x,a}T_{x,\alpha}$ se pueden conmutar el resultado final es el mismo

Denavit-Hartenberg: Algoritmo

4.1.2. Algoritmo de Denavit-Hartenberg para la obtención del modelo cinemático directo

D-H 1. Numerar los eslabones comenzando con 1 (primer eslabón móvil de la cadena) y acabando con n (último eslabón móvil). Se numerará como eslabón 0 a la base fija del robot.

D-H 2. Numerar cada articulación comenzando por 1 (la correspondiente al primer grado de libertad) y acabando en n.

D-H 3. Localizar el eje de cada articulación. Si ésta es rotativa, el eje será su propio eje de giro. Si es prismática, será el eje a lo largo del cual se produce el desplazamiento.

D-H 4. Para i de 0 a n-1 situar el eje $\mathbf{z}_i$ sobre el eje de la articulación i+1.

D-H 5. Situar el origen del sistema de la base $\{S_0\}$ en cualquier punto del eje $\mathbf{z}_0$. Los ejes $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{y}_0$ se situarán de modo que formen un sistema dextrógiro con $\mathbf{z}_0$.

D-H 6. Para i de 1 a n-1, situar el sistema $\{S_i\}$ (solidario al eslabón i) en la intersección del eje $\mathbf{z}_i$ con la línea normal común a $\mathbf{z}_{i-1}$ y $\mathbf{z}_i$. Si ambos ejes se cortasen se situaría $\{S_i\}$ en el punto de corte. Si fuesen paralelos $\{S_i\}$ se situaría en la articulación i+1.

D-H 7. Situar $\mathbf{x}_i$ en la línea normal común a $\mathbf{z}_{i-1}$ y $\mathbf{z}_i$.

Denavit-Hartenberg: Algoritmo

D-H 8. Situar $\mathbf{y}_i$ de modo que forme un sistema dextrógiro con $\mathbf{x}_i$ y $\mathbf{z}_i$.

D-H 9. Situar el sistema $\{S_n\}$ en el extremo del robot de modo que $\mathbf{z}_n$ coincida con la dirección de $\mathbf{z}_{n-1}$ y $\mathbf{x}_n$ sea normal a $\mathbf{z}_{n-1}$ y $\mathbf{z}_n$.

D-H 10. Obtener θ_i como el ángulo que hay que girar en torno a $\mathbf{z}_{i-1}$ para que $\mathbf{x}_{i-1}$ y $\mathbf{x}_i$ queden paralelos.

D-H 11. Obtener d_i como la distancia, medida a lo largo de $\mathbf{z}_{i-1}$, que habría que desplazar $\{S_{i-1}\}$ para que $\mathbf{x}_i$ y $\mathbf{x}_{i-1}$ quedasen alineados.

DH 12. Obtener a_i como la distancia medida a lo largo de $\mathbf{x}_i$ (que ahora coincidiría con $\mathbf{x}_{i-1}$) que habría que desplazar el nuevo $\{S_{i-1}\}$ para que su origen coincidiese con $\{S_i\}$.

DH 13. Obtener α_i como el ángulo que habría que girar entorno a $\mathbf{x}_i$ (que ahora coincidiría con $\mathbf{x}_{i-1}$), para que el nuevo $\{S_{i-1}\}$ coincidiese totalmente con $\{S_i\}$.

DH 14. Obtener las matrices de transformación $^{i-1}\mathbf{A}_i$ definidas en [4.7].

DH 15. Obtener la matriz de transformación que relaciona el sistema de la base con el del extremo del robot $\mathbf{T} = {}^0\mathbf{A}_1, {}^1\mathbf{A}_2 .. {}^{n-1}\mathbf{A}_n$.

DH 16. La matriz **T** define la orientación (submatriz de rotación) y posición (submatriz de traslación) del extremo referido a la base en función de las n coordenadas articulares.

Denavit-Hartenberg: Algoritmo

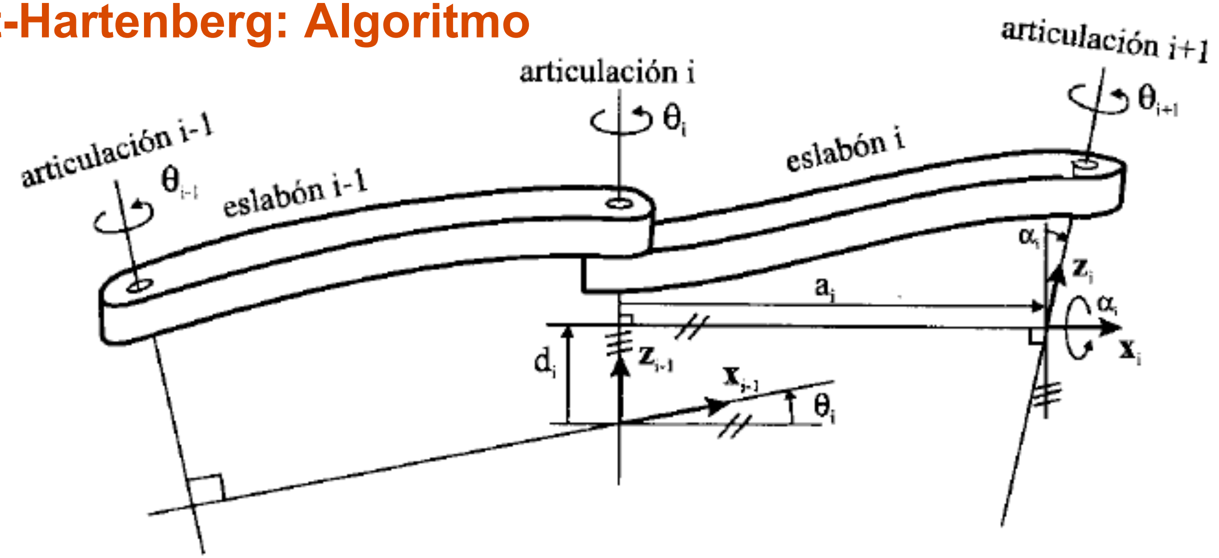


Figura 4.3. Parámetros D-H para un eslabón giratorio.

θ_i Es el ángulo que forman los ejes $\mathbf{x}_{i-1}$ y $\mathbf{x}_i$ medido en un plano perpendicular al eje $\mathbf{z}_{i-1}$, utilizando la regla de la mano derecha. Se trata de un parámetro variable en articulaciones giratorias.

d_i Es la distancia a lo largo del eje $\mathbf{z}_{i-1}$ desde el origen del sistema de coordenadas (i-1)-ésimo hasta la intersección del eje $\mathbf{z}_{i-1}$ con el eje $\mathbf{x}_i$. Se trata de un parámetro variable en articulaciones prismáticas.

a_i Es la distancia a lo largo del eje $\mathbf{x}_i$ que va desde la intersección del eje $\mathbf{z}_{i-1}$ con el eje $\mathbf{x}_i$ hasta el origen del sistema i-ésimo, en el caso de articulaciones giratorias. En el caso de articulaciones prismáticas, se calcula como la distancia más corta entre los ejes $\mathbf{z}_{i-1}$ y $\mathbf{z}_i$.

α_i Es el ángulo de separación del eje $\mathbf{z}_{i-1}$ y el eje $\mathbf{z}_i$, medido en un plano perpendicular al eje $\mathbf{x}_i$, utilizando la regla de la mano derecha.