Tema 5

Tema 5. Transformaciones 3D

5.1 Introducción
5.2 Sistemas de coordenadas. Coordenadas homogéneas
5.3 Matrices de transformación 3D
5.4 Composición de transformaciones

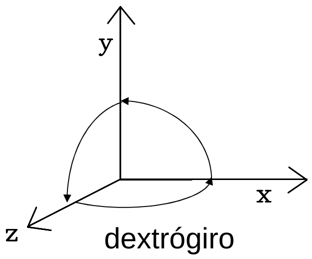
5.1 Introducción

- Las transformaciones en 3D se utilizan para:
  - Manipular objetos en el espacio 3D
    - *Traslación, giro y escalado*
  - Ayuda para visualizar y examinar objetos

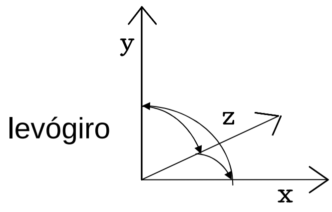
5.2 Sistemas de coordenadas. Coordenadas homogéneas

– Los sistemas de coordenadas pueden ser
  - *Dextrógiro (el que utilizaremos para realizar las transformaciones)*
  - *Levógiro*

El eje Z apunta hacia el exterior del papel



El eje Z apunta hacia el interior del papel



5.2 Sistemas de coordenadas. Coordenadas homogéneas

- Al igual que en 2D se utilizan las coordenadas homogéneas
  – Un punto 3D (x, y, z) se representa por (x, y, z, w) y como vector columna
  – Las matrices de transformación serán, por tanto, 4x4
  – Las matrices premultiplicarán a los puntos

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

5.3 Matrices de transformación 3D

- Traslación

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Escalado

$$\begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Rotación
  - Eje X

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  - Eje Y

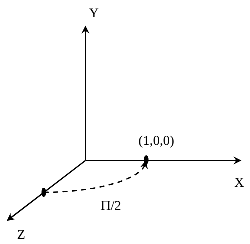
$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  - Eje Z

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5.3 Matrices de transformación 3D

Ejemplo:

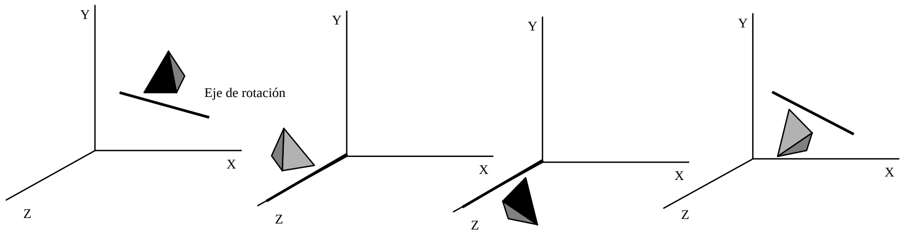


$$R_y(\Pi/2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_y(\Pi/2) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

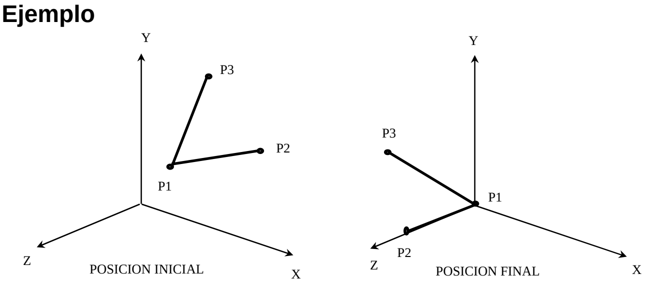
5.4 Composición de transformaciones

- Para realizar una rotación respecto a un eje cualquiera, se deben de realizar los siguientes pasos:
  - *Traslación para que el eje pase por el origen*
  - *Rotar el eje para que coincida con uno de los ejes de coordenadas*
  - *Realizar la rotación deseada alrededor del eje anterior*
  - *Aplicar las rotaciones inversas para que el eje vuelva a su orientación original*
  - *Aplicar la traslación inversa para que el eje vuelva a su posición original*



5.4 Composición de transformaciones

Ejemplo



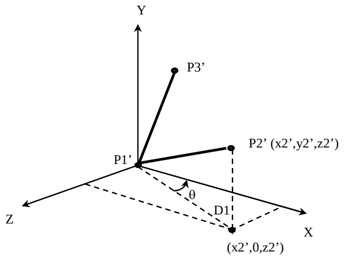
Pasos:

1. Trasladar P1 al origen
2. Girar sobre Y, de forma que P1P2 quede en el plano (Y,Z)
3. Girar sobre X, de forma que P1P2 quede en el eje Z
4. Girar sobre Z, de forma que P1P3 quede en plano (Y,Z)

5.4 Composición de transformaciones

- Trasladar P1 (x1,y1,z1) al origen

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x1 \\ 0 & 1 & 0 & -y1 \\ 0 & 0 & 1 & -z1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



- Girar respecto a Y un ángulo -(90 - θ)

  cos(θ - 90) = senθ = z2'/D1 = (z2 - z1)/D1

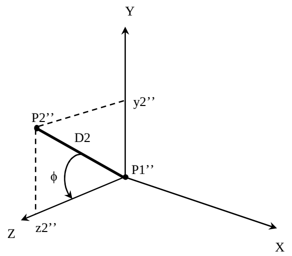
  sen(θ - 90) = -cosθ = -x2'/D1 = -(x2 - x1)/D1

donde

$$D1 = \sqrt{(z2')^2 + (x2')^2} = \sqrt{(z2 - z1)^2 + (x2 - x1)^2}$$

5.4 Composición de transformaciones

- Girar respecto a X



- Girar respecto a Z