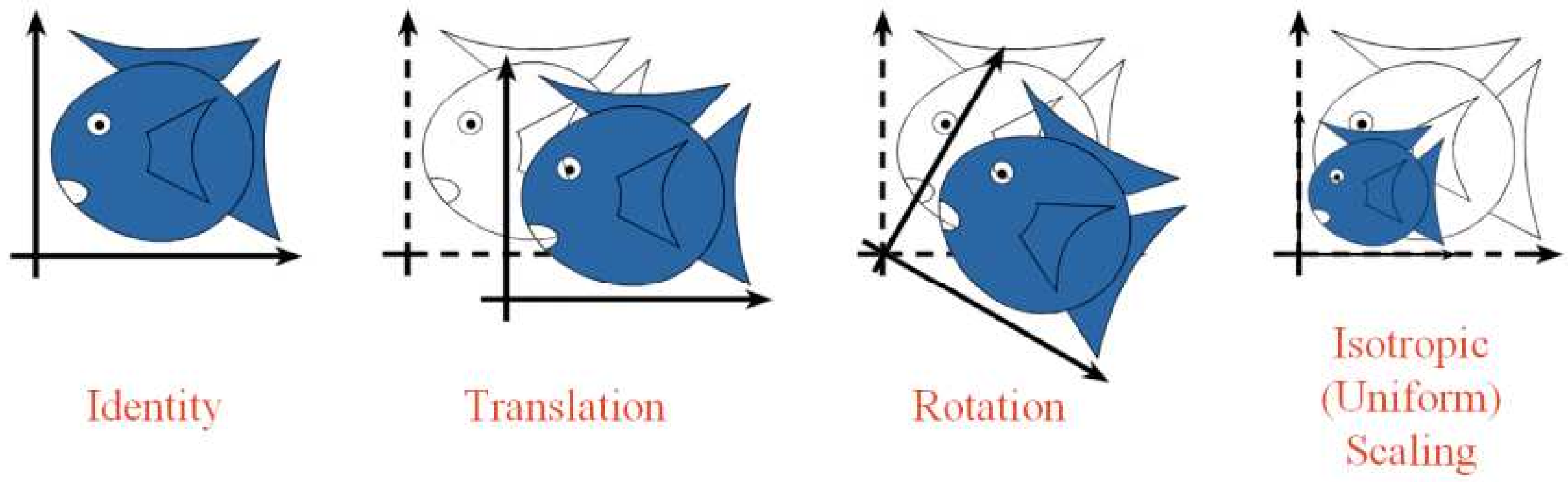
Computación Gráfica I

Coordenadas Homogéneas y Transformaciones

Daniel Fariña 06-39509
Laura Libretti 06-39796

Transformaciones



Las transformaciones se usan para:

- Posicionar objetos en escena
- Cambiar la forma de los objetos
- Crear copias de objetos
- Definir la proyección de la cámara virtual
- Animaciones

Coordenadas Homogéneas

Este sistema es necesario para poder integrar la traslación con la rotacion y escala.

El uso de las coordenadas homogéneas permite tratar todas las transformaciones geométricas como multiplicación de matrices.

Se introduce una cuarta coordenada.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

w=1

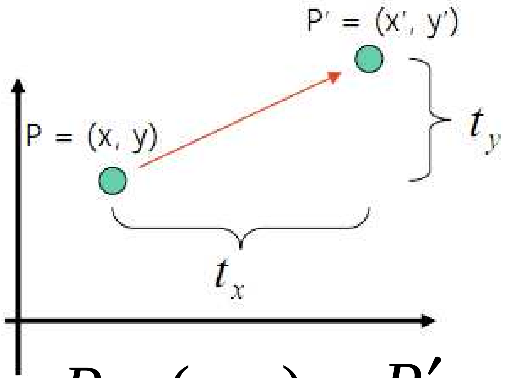
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{p' = M \cdot p}$$

Translación 2D

Reposiciona un objeto desplazándolo a nuevas coordenadas.

$$\begin{cases} x' = x + t_x \\ y' = y + t_y \end{cases}$$

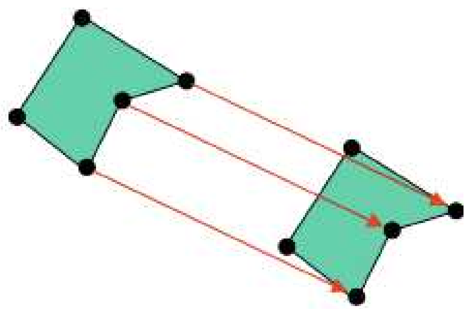


En forma matricial: $P = (x, y) \quad P' = (x', y') \quad T = (t_x, t_y)$

$$\boxed{P' = P + T}$$

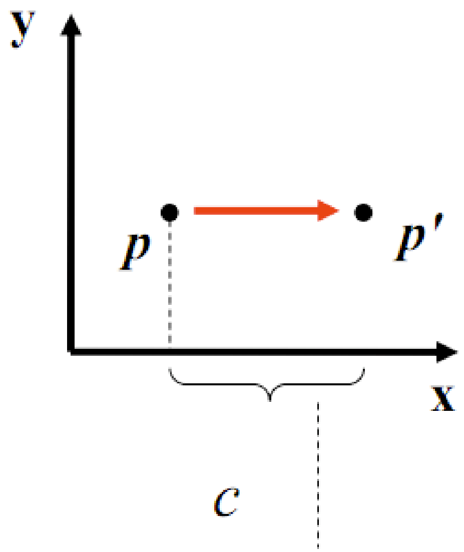
En una transformación rígida el objeto no se deforma.

- Trasladar línea :
  - Transladamos sus extremos.
- Trasladar polígonos:
  - Transladamos véstices y redibujamos.



Translación Homogénea

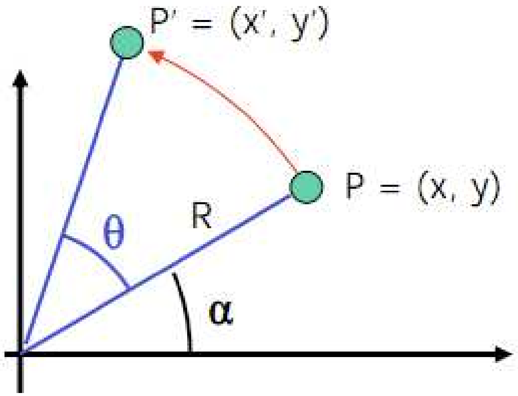
Translate$(c,0,0)$



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Rotación con respecto al origen

La posición del punto es rotada alrededor del origen de coordenadas.



$$\begin{cases} x = R \cdot \cos\alpha \\ y = R \cdot \sin\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = R \cdot \cos(\alpha + \theta) = \ldots = x \cdot \cos\theta - y \cdot \sin\theta \\ y' = R \cdot \sin(\alpha + \theta) = \ldots = x \cdot \sin\theta + y \cdot \cos\theta \end{cases}$$

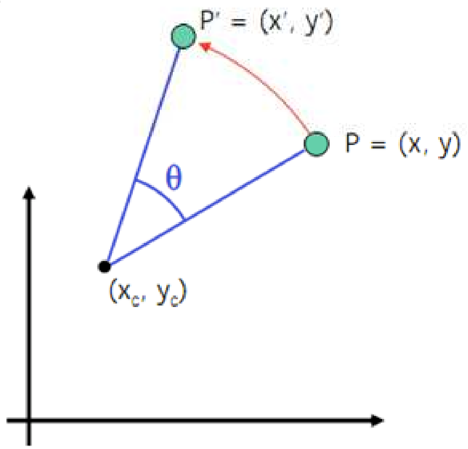
En forma matricial: $P = (x, y) \quad P' = (x', y') \quad R = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$$\boxed{P' = P \cdot R}$$

Rotación General

Fórmula general cuando el punto sobre el cual se rota no es el origen, sino un punto cualquiera (X_c , Y_c).

$$\begin{cases} x' = x_c + (x - x_c)\cdot\cos\theta - (y - y_c)\cdot\sin\theta \\ y' = y_c + (x - x_c)\cdot\sin\theta + (y - y_c)\cdot\cos\theta \end{cases}$$



Matrices homogéneas básicas de rotación:

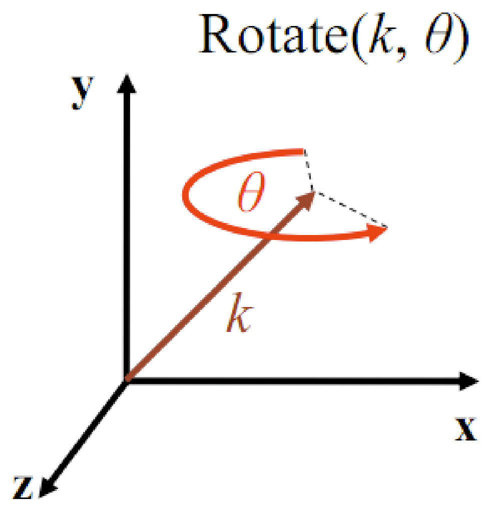
$$T(z,\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(y,\phi) = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(x,\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotación General

Sobre cualquier eje dado por el vector unitario (k_x , k_y , k_z).



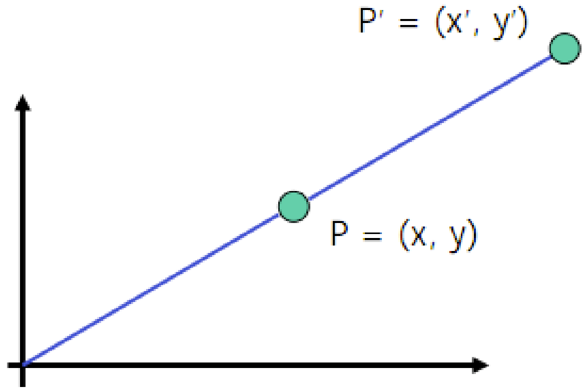
Con: $c = \cos\theta$ y $s = \sin\theta$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_x k_x(1-c)+c & k_z k_x(1-c)-k_z s & k_x k_z(1-c)+k_y s & 0 \\ k_y k_x(1-c)+k_z s & k_z k_x(1-c)+c & k_y k_z(1-c)-k_x s & 0 \\ k_z k_x(1-c)-k_y s & k_z k_x(1-c)+k_x s & k_z k_z(1-c)+c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Escalado con respecto al origen

La posición del punto se multiplica por una constante.

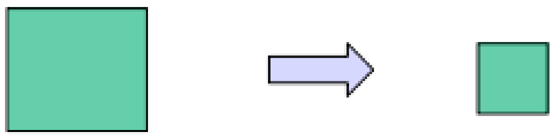
$$\begin{cases} x' = S_x \cdot x \\ y' = S_y \cdot y \end{cases}$$



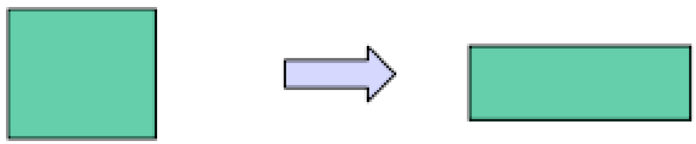
En forma matricial:

$$P = (x, y) \quad P' = (x', y') \quad S = \begin{pmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{pmatrix} \qquad \boxed{P' = P \cdot S}$$

Escalado uniforme: $S_x == S_y$



Escalado diferencial: $S_x \,!= S_y$

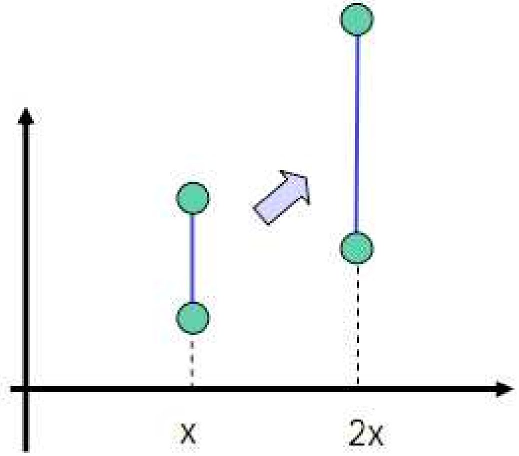


Escalado General

- Si el origen de coordenadas no se encuentra en el interior del objeto, se produce un desplazamiento.

Se usa un punto fijo y se escala a partir de él.

$$\begin{cases} x' = x_c + S_x \cdot (x - x_c) \\ y' = y_c + S_y \cdot (y - y_c) \end{cases}$$

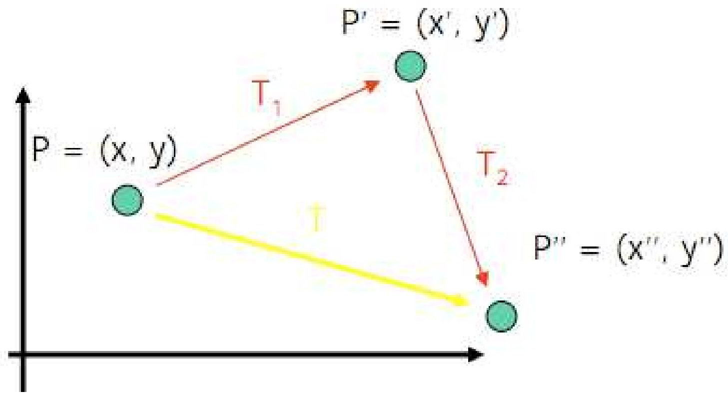


Matriz homogénea de escalado uniforme desde el origen:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Composición de Transformaciones

Para cualquier secuencia de transformaciones, podemos calcular la matriz de transformacion compuesta, calculando el producto de las transformaciones individuales.



Translaciones sucesivas:

$$P' = P \cdot T_1(t_{x1}, t_{y1})$$

$$P'' = P' \cdot T_2(t_{x2}, t_{y2})$$

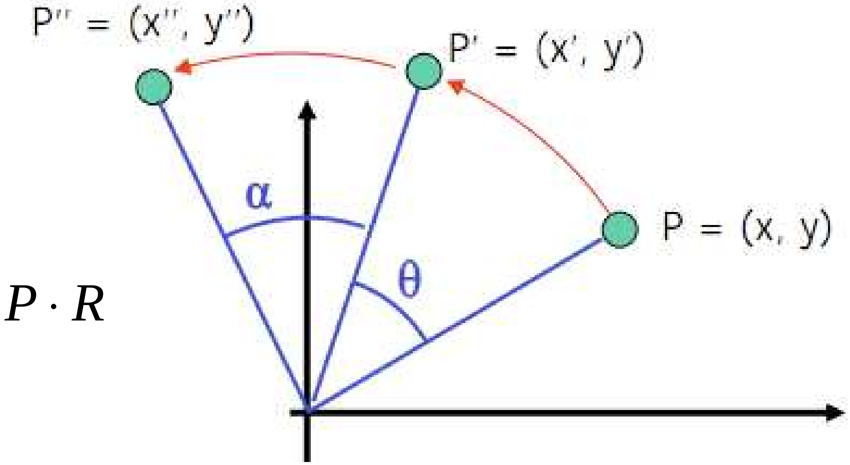
$$P'' = P' \cdot T_2 = P \cdot T_1 T_2 = P \cdot T$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t_{x1} & t_{y1} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t_{x2} & t_{y2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t_{x1} + t_{x2} & t_{y1} + t_{y2} & 1 \end{pmatrix}$$

Composición de Transformaciones

Rotaciones sucesivas:

$$P' = P \cdot R(\theta)$$
$$P'' = P' \cdot R(\alpha)$$
$$P'' = P' \cdot R(\alpha) = P \cdot R(\theta)R(\alpha) = P \cdot R$$



$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\alpha) & \sin(\theta+\alpha) & 0 \\ -\sin(\theta+\alpha) & \cos(\theta+\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

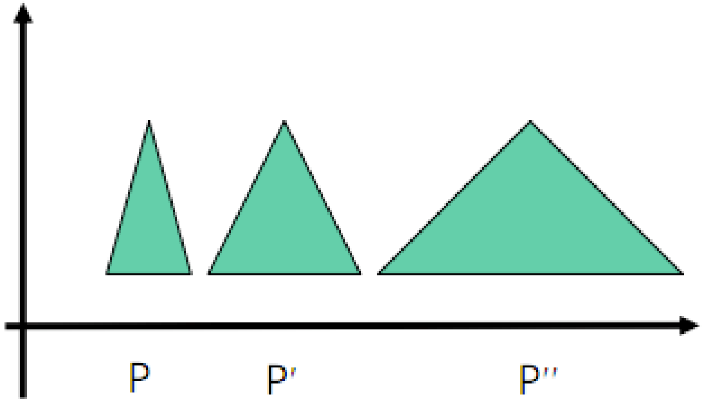
Composición de Transformaciones

Escalados sucesivos:

$$P' = P \cdot S_1(s_{x1}, s_{y1})$$

$$P'' = P' \cdot S_2(s_{x2}, s_{y2})$$

$$P'' = P' \cdot S_2 = P \cdot S_1 S_2 = P \cdot S$$



$$S = \begin{pmatrix} S_{x1} & 0 & 0 \\ 0 & S_{y1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & S_{x2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{x1} \cdot S_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & S_{y1} \cdot S_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Composición de Transformaciones

<u>En general</u>

Es posible combinar transformaciones, multiplicando las matrices correspondientes.

El producto matricial NO es conmutativo:

Ej: rotar y después transladar ≠ transladar y después rotar

Rotación > Translación:

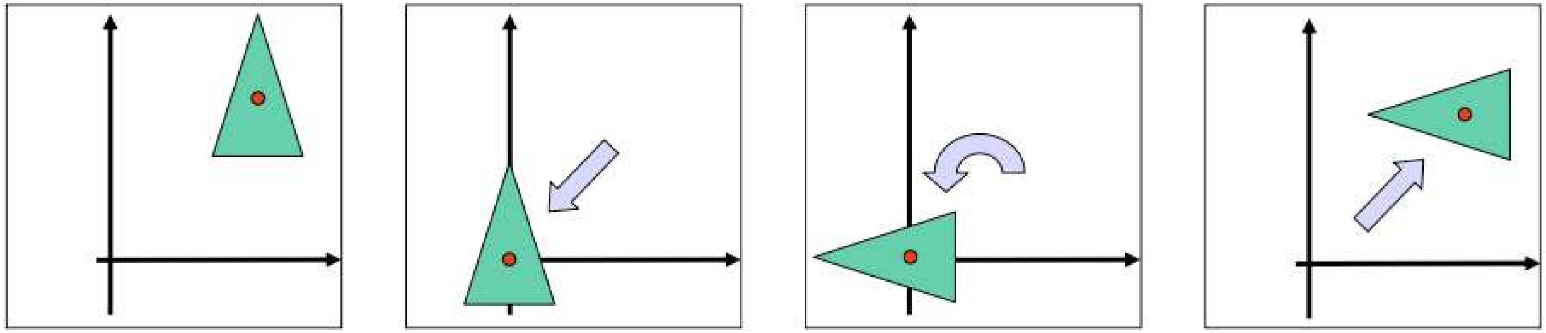
$$T((x,\alpha),p)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & p_y \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Translación > Rotación:

$$T(p(x,\alpha))=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & p_y\cdot\cos\alpha - p_z\cdot\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & p_y\cdot\sin\alpha + p_z\cdot\cos\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotación alrededor de un punto

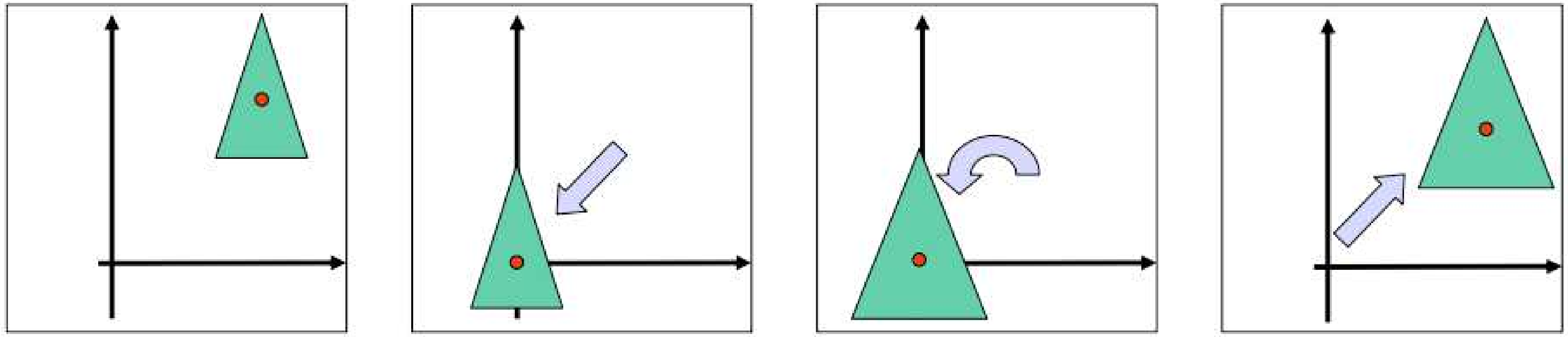
Para hacer una rotación general, podemos hacerlo mediante una composición de transformaciones básicas.



$$\boxed{P' = P \cdot T(-x_c, -y_c) \cdot R(\theta) \cdot T(x_c, y_c)}$$

Escalado alrededor de un punto

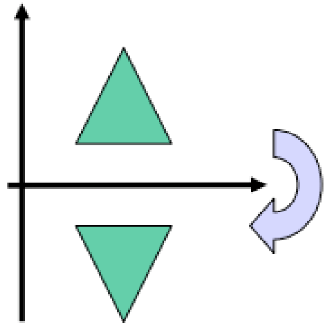
Para hacer una escalado general, podemos de igual manera.



$$P' = P \cdot T(-x_c, -y_c) \cdot S(s_x, s_y) \cdot T(x_c, y_c)$$

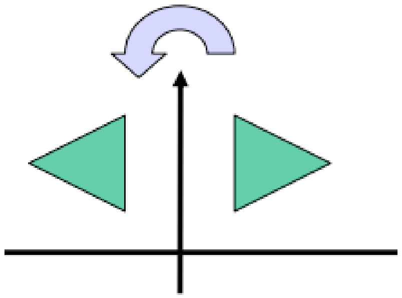
Reflexión

Sobre el eje x



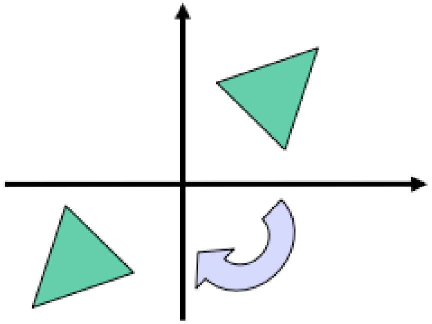
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sobre el eje y



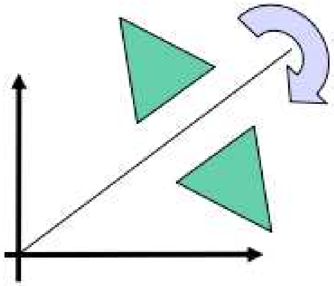
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sobre el origen de coordenadas



$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

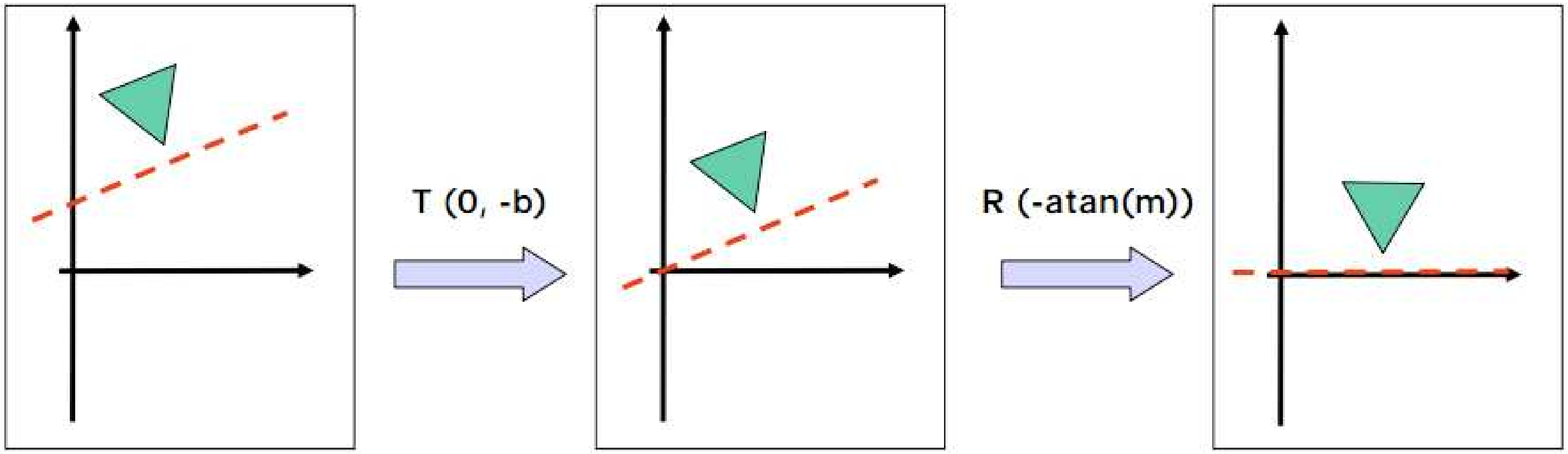
Sobre la recta y=x



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Reflexión General

Sobre una recta y=mx+b



$$\boxed{P' = P \cdot T(0,-b) \cdot R(-\arctan m) \cdot F \cdot R(\arctan m) \cdot T(0,b)}$$

Matrices de Transformación (OpenGL)

Inicialización:

- glMatrixMode(GL_MODELVIEW);
  - Para activar la matriz de transformación
- glLoadIdentity( );
  - Para cargar la identidad y así poder hacer todas las transformaciones

Transformaciones:

- glScalef(GLfloat sx, GLfloat sy, GLfloat sz);
  - Escalar según los factores sx, sy y sz
- glTranslatef(GLfloat tx, GLfloat ty, GLfloat tz);
  - Transladar según los factores tx, ty y tz
- glRotatef(GLfloat angulo, GLfloat vx, GLfloat vy, Glfloat vz);
  - Rotar angulo según el eje que define el vector (vx, vy, vz)

Matrices de Transformación (OpenGL)

Ejemplo:

```
Display( ){
    …
    glMatrixMode(GL_MODELVIEW);
    glLoadIdentity( );
    glTranslatef(0.0, 0.0, -5.0);
    glRotatef(45.0, 0.0, 0.0);
    glScalef(2.0, 2.0, 2.0);
    DrawCube( );
    …
}
```

Matrices de Transformación (OpenGL)

OpenGL permite guardar el estado de la matriz para luego volver a utilizarlo de la siguiente manera:

- glPushMatrix( );
  - Salva el estado actual de la matriz
- glPopMatrix( );
  - Recupera el estado de la matriz

Matrices de Transformación (OpenGL)

```
transform robot
        glPushMatrix( );
                transform head
                draw head
        glPopMatrix( );
        glPushMatrix( );
                transformbody
                glPushMatrix( );
                        transform left-arm
                        draw left-arm
                glPopMatrix( );
                glPushMatrix( );
                        transform right-arm
                        draw right-arm
                glPopMatrix( );
                draw body
        glPopMatrix( );
```

Ejemplo:
Robot simple con cabeza,
Cuerpo y brazos.

Bibliografía

Para la realización de esta presentación se utilizaron las siguientes fuentes:

- Prof. Eduardo Fernández de la Facultad de Ing. de la Universidad de la República, Montevideo, Uruguay.
- Clases del Departamento de Arquitectura y Tecnología de Computadores, Universidad de Sevilla, España.
- Prof. Alexandra La Cruz de la Universidad Simón Bolívar.
- OpenGL Programming Guide.