SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA
TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO
INSTITUTO TECNOLÓGICO DE VERACRUZ

Robótica.

Resumen

3.1 Sistemas de coordenadas
3.2 Movimiento rígido y transformaciones homogéneas

Presenta

Stephanie Torres Alvario
N° de Control: E15020199

Santiago Merodio Vicente
N° de Control: E14020842

Serrano Melo Edgar Gabriel.
N° de Control: E15020185.

Vázquez Arteaga Edgar Alberto
N° de Control: E14020838

Zarrabal Rivera German
N° de Control: E14020846

Villegas Portela Marco Antonio
N° de Control: E14020842

DR. JOSÉ ANTONIO GARRIDO NATARÉN

Enero - Junio 2019

H. Veracruz, Ver.

Clasificación del sistema de coordenadas.

Sistema de coordenadas cartesianas

Las coordenadas de un punto cualquiera vendrán dadas por las proyecciones del vector de posición del punto sobre cada uno de los ejes.
Este tipo de coordenadas se ubican en un plano cartesiano al que están asociados los ejes x, y, z.

Todos los ejes coordenadas debe estar escalonados bajo el mismo criterio y ser perpendiculares entre sí, estos ejes pueden conformar un sistema bidimensional o tridimensional dependiendo de si está formando por dos o tres ejes.

Sistema de coordenadas polares

En este sistema la ubicación de un punto en el espacio está determinada por un ángulo y una distancia (magnitud).

Para medir Θ, en radianes necesitamos una semirrecta dirigida llamada eje polar y para medir r, un punto fijo llamado polo

El sistema de referencia está compuesto por único punto “O” del plano, al que se le domina como origen o polo, y una recta que pasa por este punto, llamada eje polar (equivalente al eje “x” en el sistema cartesiano).

Sistema de coordenadas esféricas

Las coordenadas esféricas son un sistema de coordenadas tridimensional basado en la misma idea que las coordenadas polares, en este sistema la ubicación de un punto en el espacio están determinada por una distancia y dos ángulos.

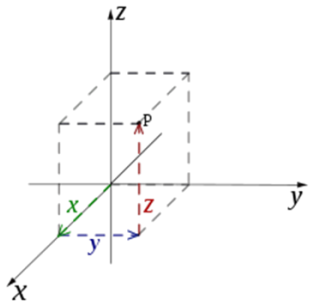
Sistema de coordenadas cilíndricas

Las coordenadas cilíndricas son un sistema de coordenadas tridimensional en el que la ubicación de un punto en el espacio determinada por una distancia, una altura y un ángulo.

Posición

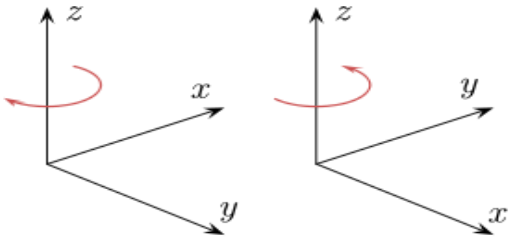
Existen dos conceptos clave para describir los movimientos de los cuerpos: el lugar en el que se encuentra el cuerpo ó, dicho de otra forma, su posición y el momento en el que se encuentra en ese lugar ó, dicho de otro modo, el instante de tiempo.

Para determinar la posición de un cuerpo primero establecemos el sistema de referencia. En un plano, en dos dimensiones, la coordenada X corresponde al eje de abscisa, eje horizontal y la coordenada Y al eje de ordenada, eje vertical; además de usar el eje Z para representar el modelo de 3 dimensiones



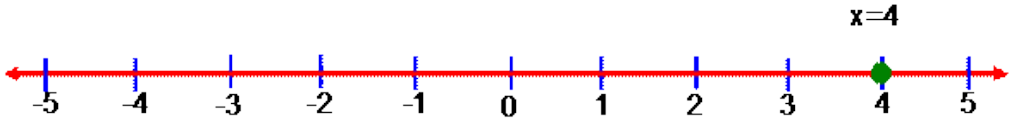
Orientación

La orientación es una noción geométrica que en dos dimensiones permite decir cuándo un giro se produce en sentido horario o anti horario, y en tres dimensiones si una figura es levógira o dextrógiro. Un viraje es dextrógiro si se mueve en el sentido de las agujas del reloj, en contraposición a levógiro.



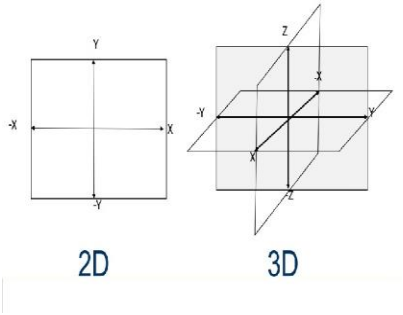
Ejes de Referencia

Viene dado por un punto de referencia denominado origen y un sistema de coordenadas. El origen de coordenadas es el punto de referencia de un sistema de coordenadas y en él el valor de todas las coordenadas del sistema sistema es nulo. Sobre cada uno de los ejes se definen vectores unitarios, unitarios, denominados denominados versores, que indican indican la dirección del eje.



Ejes de Referencia
Sistema de coordenadas cartesianas (x,y,z)

Un sistema de coordenadas cartesianas se define por dos ejes ortogonales en un sistema bidimensional y tres ejes ortogonales en un sistema tridimensional, que se cortan en el origen O. Las coordenadas de un punto cualquiera vendrán dadas por las proyecciones del vector de posición del punto sobre cada uno de los ejes.



Movimiento rígido
Forman parte de las transformaciones del plano con el propósito de:

- Encontrar las invariantes para cada movimiento.
- Justificar las propiedades de una figura.
- Verificar la congruencia entre elementos de dos figuras en el plano.
- Hallar las ecuaciones correspondientes para dichos movimientos.
- Utilizan comandos de simetría axial, traslación y rotación.
- Movimiento rígido

Transformaciones repaso

Conjunto de modificaciones que se aplican a un modelo de tres dimensiones para su representación bidimensional.

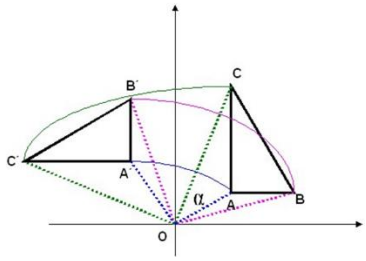
Vector de un punto inicial ----------V=(x,y)
Vector de traslación ----------T=(tx, ty)
Coordenadas del punto resultante---------- V'=(x',y')

Por lo tanto: v'= v + t
Por otro lado si E y G fueran matrices de escalado y giro.
V'=v·e y v'=v·g

Transformaciones homogéneas

- Se divide en tres operaciones básicas:

- Rotación alrededor de los ejes de coordenadas.
- Traslación.
- Cambios de posición y escalado o cambio en las dimensiones de los objetos.



Transformaciones homogéneas

Es el resultado de añadir una dimensión extra a un sistema de referencia dado.

v=(x,y,w), v'=(x',y',w') donde w=1

Las traslaciones lineales se pueden expresar como:

V'=v·t

Si se utiliza una matriz de traslación (t):

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t_x & t_y & 1 \end{bmatrix}$$

Se comprueba que (x',y',1)=(x,y,1)·t

Las traslaciones se efectúan sumando, mientras que los giros y cambios de escala se consiguen multiplicando.

Transformaciones homogéneas

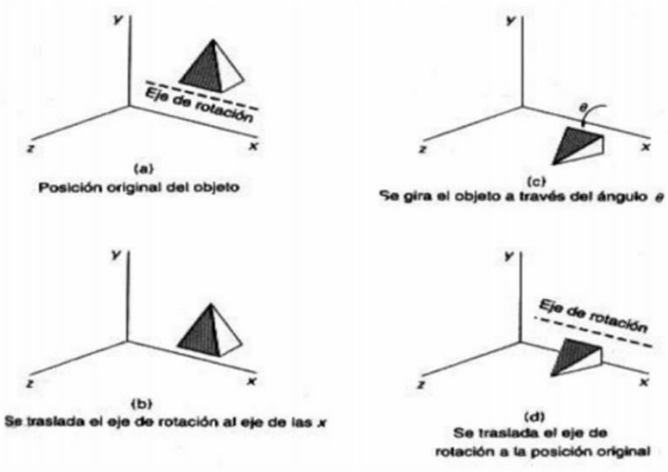


Figura 8. Proceso de giro sobre un eje paralelo al eje X.

Matrices

Una matriz de n por m elementos, es una matriz cuadrada si el número de filas es igual al número columnas, es decir, n = m y se dice, entonces que la matriz es de orden n:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Una matriz cuadrada es diagonal si tiene nulos todos los elementos excepto los de la diagonal principal, de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matriz triangular superior

Una matriz cuadrada es triangular superior si tiene nulos todos los elementos que están por debajo de la diagonal principal, de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Matriz triangular inferior

Una matriz cuadrada es triangular inferior si tiene nulos todos los elementos que están por encima de la diagonal principal, de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Una matriz es simétrica si es una matriz cuadrada, la cual tiene la característica de ser igual a su traspuesta. Una matriz de n x m elementos:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Es simétrica, si es una matriz cuadrada (m = n) y para todo i, j con i, j =1, 2, 3, 4,..n. Nótese que la simetría es respecto a la diagonal principal.

$$\begin{bmatrix} -8 & -1 & 3 \\ -1 & 7 & 4 \\ 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

Una matriz antisimétrica es una matriz cuadrada A cuya traspuesta es igual a su negativa, es decir vale la relación AT = -A.

Una matriz de m × n elementos (m = filas, n = columnas) :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Es antisimétrica (o hemisimétrica), si es una matriz cuadrada (m = n) y aji = - aij para todo i, j =1, 2, 3,...,n. En consecuencia, aii=0 para todo i. Por lo tanto, la matriz A asume la forma:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Coordenadas homogéneas

La representación mediante coordenadas homogéneas de la localización de sólidos e n un espacio dimensional se realiza a través de coordenadas de un espacio (n+1)-dimensional. Es decir, un espacio n-dimensional se encuentra representado en coordenadas homogéneas por (n+1) dimensiones, de tal forma que un vector p(x, y, z) vendrá representado por p(wx, wy, wz, w), donde w tiene un valor arbitrario y representan un factor de escala.

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aw \\ bw \\ cw \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ 1 \end{bmatrix}$$

A partir de la definición de las coordenadas homogéneas surge inmediatamente el concepto de matriz de transformación homogénea. Se define como matriz de transformación homogénea T a una matriz de dimensión 4*4 que representa la

transformación de un vector de coordenadas homogéneas de un sistema de coordenadas a otro.

$$T = \begin{bmatrix} R_{3*3} & p_{3*1} \\ f_{1*3} & w_{1*1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Rotación & Traslación \\ Perspectiva & escalado \end{bmatrix}$$

En resumen, una matriz de transformación homogénea se puede aplicar para:

1.Representar la posición y orientación de un sistema girado y trasladado O'UVW con respecto a un sistema fijo de referencia oxyz, que es lo mismo que representar una rotación y traslación realizada sobre un sistema de referencia.

2.Transformar un vector expresado en coordenadas con respecto a un sistema O'UVW, a su expresión en coordenadas del sistema de referencia OXYZ.

3.Rotar y trasladar un vector con respecto a un sistema de referencia fijo 0XYZ.

$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

Traslación – Para un sistema OUVW trasladado únicamente un vector $p = p_x i + p_y j + p_z k$ con respecto al sistema fijo OXYZ. La matriz homogénea será la matriz básica de traslación:

$$\mathbf{T}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Un vector cualquiera r, representado en OUVW por ruvw , tendrá como coordenadas en el sistema OXYZ:

$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_u + p_x \\ r_v + p_y \\ r_w + p_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotación

- Cuando el sistema O'UVW solo esta rotado con respecto a OXYZ.
- Las matrices de rotación son las mismas que las que se vieron en la sección anterior.
- Existen 3 rotaciones, con respecto a OX, OY y OZ. Estas son: T(x,α), T(y,φ) y T(z,θ)

$$T(x,\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -sen(\alpha) & 0 \\ 0 & sen(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(y,\phi) = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & 0 & sen(\phi) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -sen(\phi) & 0 & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(z,\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -sen(\theta) & 0 & 0 \\ sen(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$