INSTITUTO TECNOLÓGICO DE VERACRUZ

Materia:
Robótica

Unidad 3:
Cinemática

Tema:
Cinemática Inversa

Catedrático:
Dr. José Antonio Garrido Natarén

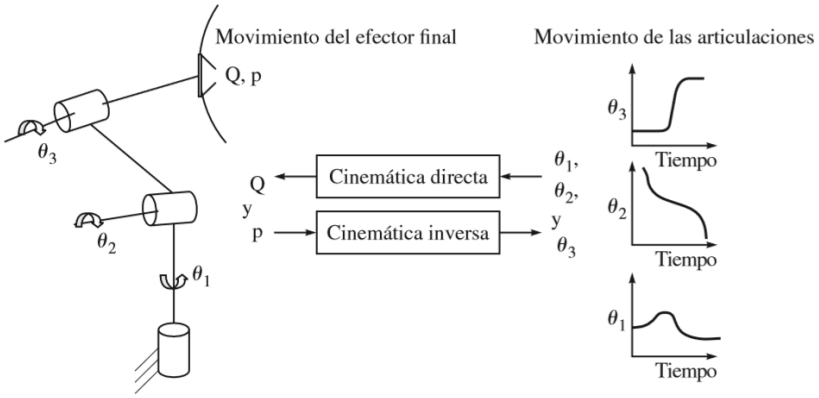
H. Veracruz, Ver. Noviembre de 2014

La cinemática del robot estudia el movimiento del mismo con respecto a un sistema de referencia.

Introducción

Para que un robot ejecute una tarea específica, primero que nada deberá establecerse la posición y la orientación del efector final, es decir, su posición o configuración en relación con su base. Esto es esencial para resolver problemas de posicionamiento. Una vez que las relaciones mencionadas se diferencian una y dos veces, surgen entonces los problemas de análisis de la velocidad y aceleración necesarios para el control de movimientos uniformes del efector final, así como el análisis dinámico del robot en cuestión.

Puesto que la configuración del efector final se determina por las seis variables cartesianas que se controlan mediante los movimientos de las articulaciones del robot, es necesario encontrar las relaciones entre los dos conjuntos. En el análisis de posición, se encuentra una relación entre las coordenadas cartesianas, es decir, la posición de un punto en el efector final y su orientación con los ángulos de las articulaciones. Aquí existen dos tipos de problemas: ***la cinemática directa y la inversa***.



Como se ilustra en la figura, en la ***cinemática directa***, las posiciones de las articulaciones ya están determinadas y el problema radica en encontrar la

configuración del efector final. En la ***cinemática inversa***, se resuelve inverso, es decir, la posición del efector final está determinada y el problema radica en encontrar los ángulos de las articulaciones.

Cinemática Inversa

El problema de la cinemática inversa consiste en la determinación de las variables de articulaciones correspondientes a una orientación y posición específicas del efector final. La solución de este problema es de fundamental importancia con el fin de transformar las especificaciones de movimiento asignadas al efector final en el espacio operacional en los correspondientes movimientos de espacio de las articulaciones. En la cinemática directa, la matriz de posición y rotación del efector final se computa en forma única una vez que se conocen las variables de las articulaciones. Por otro lado, el problema de la cinemática inversa es mucho más complejo debido a las siguientes razones:

- → Por lo general, las ecuaciones por resolver son no lineales en las variables de articulaciones; de este modo, no siempre es posible encontrar una solución explícita.
- → Pueden existir múltiples soluciones.
- → También pueden existir soluciones infinitas, por ejemplo, en el caso de manipuladores robóticos cinemáticamente redundantes.
- → Posiblemente no hay soluciones admisibles debido a la arquitectura del manipulador.

Un planteamiento posible frente al problema de la cinemática inversa es buscar una solución explícita usando álgebra o geometría.

Se han desarrollado algunos procedimientos genéricos para ser programados, de modo que un computador pueda, a partir del conocimiento de la cinemática del robot (parámetros de DH, por ejemplo) obtener la n-tupla de valores articulares que posicionan y orientan su extremo.

El inconveniente de estos procedimientos es que se trata de métodos numéricos iterativos, cuya velocidad de convergencia e incluso su convergencia no está siempre garantizada.

A la hora de resolver el problema cinemático inverso es mucho más adecuado encontrar una solución cerrada. Esto es, encontrar una relación matemática explícita de la forma:

$$q_k = F_k(x, y, z, \alpha, ß, \gamma)$$

$$k = 1...n \text{ (grados de libertad)}$$

Este tipo de solución presenta las siguientes ventajas:

- En muchas aplicaciones, el problema cinemático inverso ha de resolverse en tiempo real (por ejemplo, en el seguimiento de una determinada trayectoria). Una solución de tipo iterativo no garantiza tener la solución en el momento adecuado.

- Al contrario de lo que ocurría en el problema cinemático directo, con cierta frecuencia la solución del problema cinemático inverso no es única; existiendo diferentes n-tuplas(q1,...,qn)exp T que posicionan y orientan el extremo del robot de mismo modo. En estos casos una solución cerrada permite incluir determinadas reglas o restricciones que aseguren que la solución obtenida sea la más adecuada posible.

No obstante, la mayor parte de los robots poseen cinemáticas relativamente simples que facilitan en cierta medida la resolución de su problema cinemático inverso. Por ejemplo si se consideran solo tres primeros grados de libertad de muchos robots, estos tienen una estructura planar, los tres primeros elementos quedan contenidos en un plano. Esta circunstancia facilita la resolución del problema.

Asimismo, en muchos robots se da la circunstancia de que los tres grados de libertad últimos, dedicados fundamentalmente a orientar el extremo del robot, correspondan a giros sobre los ejes que se cortan en un punto.

De nuevo esta situación facilita el cálculo de la n- tupla (q1…qn)exp T correspondiente a la posición y orientación deseadas.

Por lo tanto, para los casos citados y otros, es posible establecer ciertas pautas generales que permitan plantear y resolver el problema cinemático inverso de una manera sistemática.

Los métodos geométricos permiten tener normalmente los valores de las primeras variables articulares, que son las que consiguen posicionar el robot.

Para ello utilizan relaciones trigonometrías y geométricas sobre los elementos del robot.

Se suele recurrir a la resolución de triángulos formados por los elementos y articulaciones del robot.

Como alternativa se puede recurrir a manipular directamente las ecuaciones correspondientes al problema cinemático directo. Es decir, ya que este establece la relación:

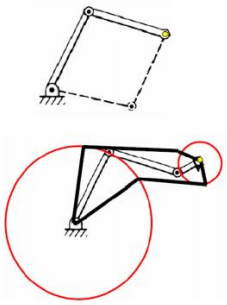
$$T_{ij} = \begin{pmatrix} n & o & a & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donde los elementos T_{ij} son funciones de las coordenadas articulares $(q_1 \ldots q_n)$exp T, es posible pensar que mediante ciertas combinaciones de las ecuaciones planteadas se puedan despejar las n variables articulares q_i en función de las componentes de los vectores n, o, a y p.

Por último, si se consideran robots con capacidad de posicionar y orientar su extremo en el espacio, esto es, robots con 6 grados de libertad, el método de desacoplamiento cinemático permite, para determinados tipos de robots, resolver los primeros grados de libertad, dedicados al posicionamiento, de una manera independiente a la resolución de los últimos grados de libertad, dedicados a la orientación.

Cada uno de estos dos problemas simples podrá ser tratado y resuelto por cualquier procedimiento.

Si se desea: Posicionar el elemento terminal en un punto del plano



Número de GDL del manipulador = Número de GDL que requiere la tarea (Se tienen dos soluciones).

Número de GDL del manipulador > Número de GDL que requiere la tarea (Tiene soluciones infinitas).

Tipos de solución

a problemas de cinemática inversa

- **Métodos geométricos:** Se suele utilizar para las primeras variables articulares, uso de relaciones geométricas y trigonométricas.
- **Por matrices de transformación homogénea:** Despejar las n variables q_i en función de los componentes de los vectores n, o, a y p.
- **Desacoplamiento cinemático:** En robots de 6 GDL, separación de orientación y posicionamiento.
- **Soluciones numéricas (iterativas):** No aplicables en tiempo real

Métodos Geométricos

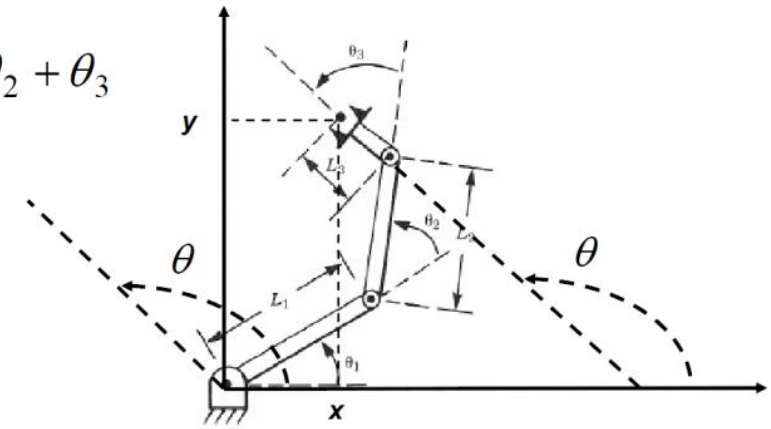
Es importante recordar las identidades trigonométricas

Este procedimiento es adecuado para robots de pocos grados de libertad o para el caso de que se consideren solo los primeros grados de libertad, dedicados a posicionar el extremo.

El procedimiento se basa en encontrar un número suficiente de relaciones geométricas en las que intervendrán las coordenadas del extremo del robot, sus coordenadas articulares y las dimensiones físicas de sus elementos.

La orientación del último eslabón es la suma de las variables articulares

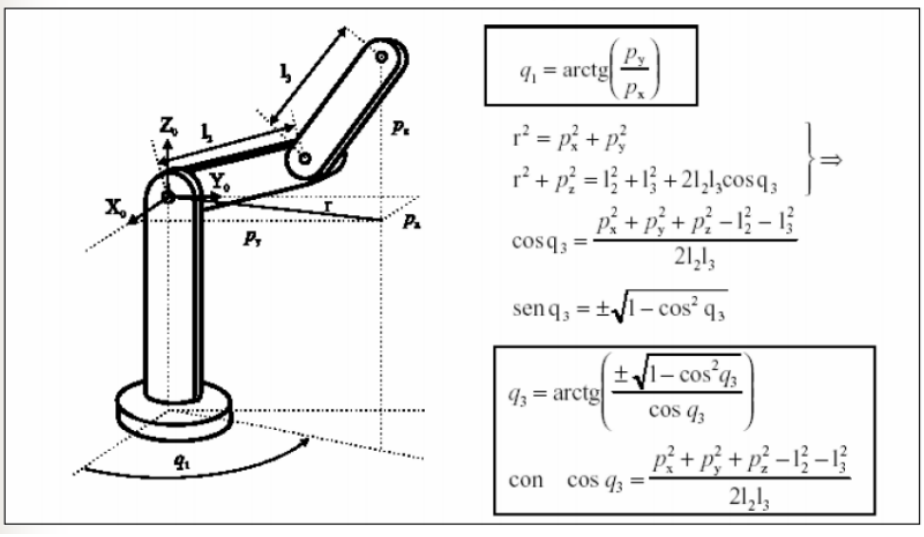
$$\theta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$$

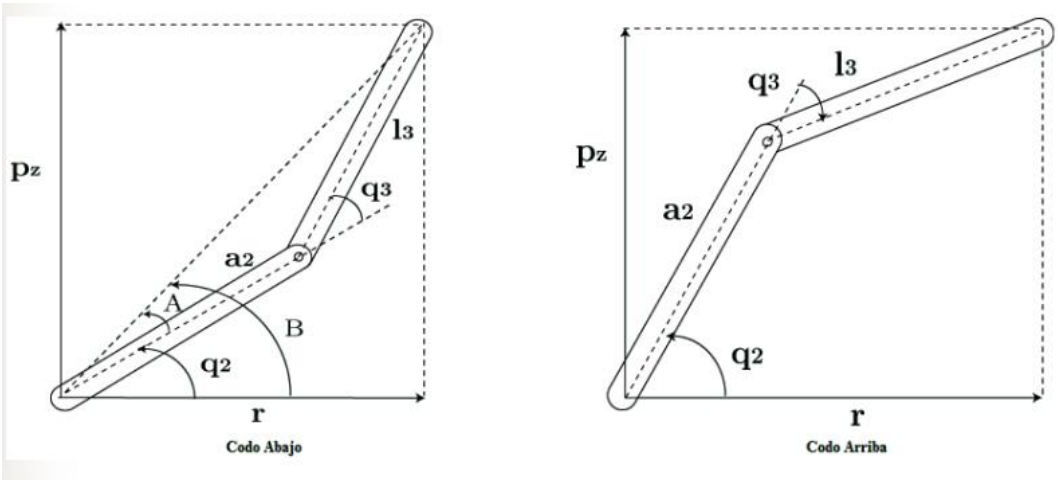


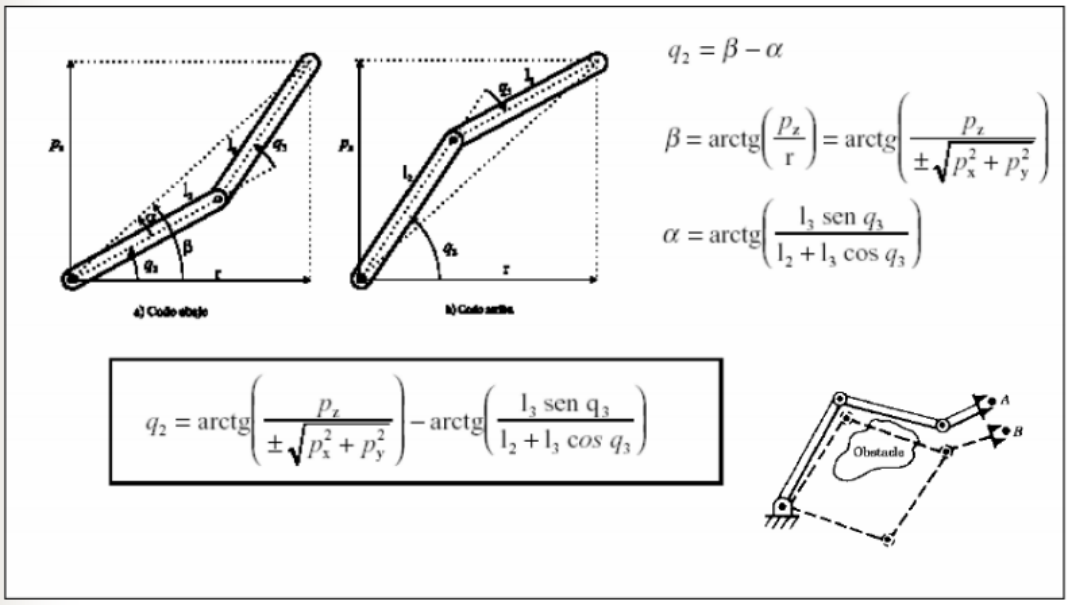
Para mostrar el procedimiento a seguir se va a aplicar el método a la resolución del problema cinemático inverso de un robot con 3 grados de libertad de rotación (estructura típica articular).

El dato de partida son las coordenadas (Px, Py, Pz) referidas a (S0) en las que se requiere posicionar su extremo.

Como se ve este robot posee una estructura planar, quedando este plano definido por el ángulo de la primera variable articular q1.







Como se ve, existen dos posibles soluciones para q_2 y q_3 según se tome el signo positivo o negativo de la raíz. Estas corresponden a las configuraciones de codo arriba y codo abajo del robot.

Matriz de Transformación Homogénea

En principio es posible tratar de obtener el modelo cinemático inverso de un robot a partir del conocimiento de su modelo directo. Es decir, suponiendo conocidas las relaciones que expresan el valor de la posición y orientación del extremo del robot en función de sus coordenadas articulares, obtener por manipulación de aquellas las relaciones inversas.

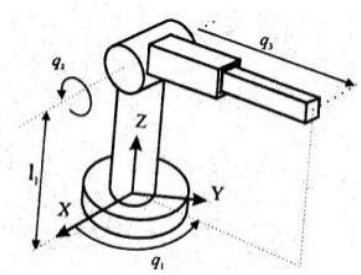


Figura 4.9. Robot polar de 3 GDL.

Sin embargo, en la práctica esta tarea no es trivial siendo en muchas ocasiones tan compleja que obliga a desecharla. Además, puesto que el problema cinemático directo, resuelto a través de T_{ij} contiene en el caso de un robot de 6 grados de libertad 12 ecuaciones, y se busca solo 6 relaciones (una por cada grado de libertad), existirá, necesariamente ciertas dependencias entre las 12 expresiones de partida con lo cual la elección de las ecuaciones debe hacerse con sumo cuidado.

Se va a aplicar este procedimiento al robot de 3 grados de libertad de configuración esférica (2 giros y un desplazamiento). El robot queda siempre contenido en un plano determinado por el ángulo q_1.

El primer paso a dar para resolver el problema cinemático inverso es obtener Tij correspondiente a este robot. Es decir, obtener la matriz T que relaciona el sistema de referencia (S0) asociado a la base con el sistema de referencia (S3) asociado a su extremo. A continuación se muestra la asignación de sistemas de referencia según los criterios de DH con el robot situado en su posición de partida (q1 = q2 = 0), y los valores de los parámetros de DH.

A partir de esto es inmediato obtener las matrices A y la matriz T.

Obtenida la expresión de T en función de las coordenadas articulares (q1, q2, q3), y supuesta una localización de destino para el extremo del robot definida por los vectores n, o, a y p, se podría intentar manipular directamente las 12 ecuaciones resultantes de T a fin de despejar q1, q2 y q3 en función de n, o, a y p.

Sin embargo, este procedimiento directo es complicado, apareciendo ecuaciones trascendentes. En lugar de ello, suele ser más adecuado aplicar el siguiente procedimiento:

Puesto que

T = 0A1 (1A2)(2A3), se tendrá que:

(1 / 0A1) T = 1A2(2A3)

(1 / 1A2) (1 / 0A1) T = 2A3

$$
{}^{i-1}A_i = T_{z,d}T_{z,\theta}T_{x,a}T_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\cos\alpha_i \operatorname{sen}\theta_i & \operatorname{sen}\alpha_i \operatorname{sen}\theta_i & a_i\cos\theta_i \\ \operatorname{sen}\theta_i & \cos\alpha_i\cos\theta_i & -\operatorname{sen}\alpha_i\cos\theta_i & a_i\operatorname{sen}\theta_i \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Como es sabido, la inversa es la transpuesta

$$
{}^{i}A_{i-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & \operatorname{sen}\theta_i & 0 & -a_i \\ -\cos\alpha_i \operatorname{sen}\theta_i & \cos\alpha_i\cos\theta_i & \operatorname{sen}\alpha_i & -d_i\operatorname{sen}\alpha_i \\ \operatorname{sen}\alpha_i \operatorname{sen}\theta_i & -\operatorname{sen}\alpha_i\cos\theta_i & \cos\alpha_i & -d_i\cos\alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{0}\mathbf{T}_i = {}^{0}\mathbf{A}_1\,{}^{1}\mathbf{A}_2 \cdots {}^{i-1}\mathbf{A}_i = \prod_{j=1}^{i} {}^{j-1}\mathbf{A}_j \qquad \text{for } i = 1, 2, \ldots, n
$$

$$
= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i & \mathbf{y}_i & \mathbf{z}_i & \mathbf{p}_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{0}\mathbf{R}_i & {}^{0}\mathbf{p}_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

[xi ,yi ,zi] = Matriz de orientación del sistema de coordenadas i-ésimo establecido en el elemento i con respecto al sistema de coordenadas de la base. Es la matriz particionada superior izquierda 3x3 de 0Ti.

pi = Vector de posición que apunta desde el origen del sistema de coordenadas de la base hasta el origen del sistema de coordenadas i-ésimo. Es la matriz particionada superior derecha 3x1 de 0Ti.

Para i = 6, se tiene la siguiente matriz T:

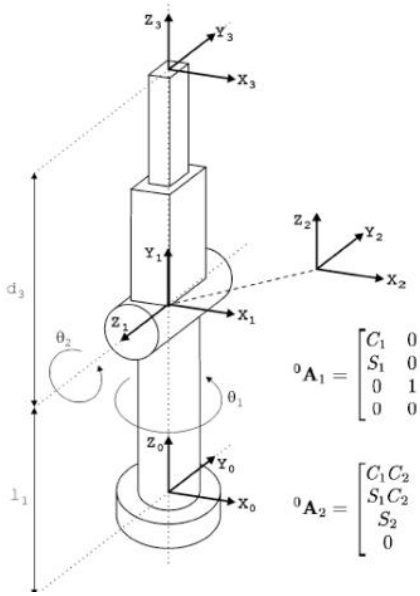
$$
\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_6 & \mathbf{y}_6 & \mathbf{z}_6 & \mathbf{p}_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{0}\mathbf{R}_6 & {}^{0}\mathbf{p}_6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n} & \mathbf{s} & \mathbf{a} & \mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

n = Vector normal de la mano. Suponiendo una mano del tipo de mordaza paralela que es ortogonal a los dedos del brazo del robot.

s = Vector de deslizamiento de la mano. Está apuntando en la dirección del movimiento de los dedos cuando la pinza se abre y se cierra.

a = Vector de aproximación de la mano. Está apuntando en la dirección normal a la palma de la mano (placa de montaje de la herramienta).

p = Vector de posición de la mano. Apunta desde el origen del SC de la base hasta el origen del SC de la mano, que se suele localizar en el punto central de los dedos totalmente cerrados.



Articulación	θ	d	a	α
1	θ_1	l_1	0	90
2	θ_2	0	0	-90
3	0	d_3	0	0

$$ {}^0\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & -S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^2\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^0\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} C_1C_2 & -S_1 & -C_1S_2 & 0 \\ S_1C_2 & C_1 & -S_1S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & C_2 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T} = {}^0\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} C_1C_2 & -S_1 & -C_1S_2 & -d_3C_1S_2 \\ S_1C_2 & C_1 & -S_1S_2 & -d_3S_1S_2 \\ S_2 & 0 & C_2 & d_3C_2 + l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ \mathbf{T} = {}^0\mathbf{A}_1 \, {}^1\mathbf{A}_2 \, {}^2\mathbf{A}_3 $$

$$ ({}^0\mathbf{A}_1)^{-1} \, \mathbf{T} = {}^1\mathbf{A}_2 \, {}^2\mathbf{A}_3 $$

$$ \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -l_1 \\ S_1 & -C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & -S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & -S_2 & -S_2d_3 \\ S_2 & 0 & C_2 & C_2d_3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Eligiendo el elemento (3,4):

$$ S_1p_x - C_1p_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan\theta_1 = \left(\frac{p_y}{p_x}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta_1 = \arctan\left(\frac{p_y}{p_x}\right)} $$

Los procedimientos vistos permiten obtener los valores de las 3 primeras variables articulares del robot, aquellas que posicionan su extremo en las coordenadas (Px, Py, Pz) determinadas, aunque pueden ser igualmente utilizadas para la obtención de las 6 a costa de una mayor complejidad.

En general no basta con posicionar el extremo del robot en un punto del espacio, sino que es preciso conseguir que la herramienta se oriente de una manera determinada. Para ello, los robots cuentan con otros tres grados de libertad adicionales, situados al final de la cadena cinemática y cuyos ejes, generalmente, se cortan en un punto, que informalmente se denomina muñeca del robot.

Si bien la variación de estos tres últimos grados de libertad origina un

$$({}^1\mathbf{A}_2)^{-1}\,({}^0\mathbf{A}_1)^{-1}\,\mathbf{T} = {}^2\mathbf{A}_3$$

$$\begin{bmatrix} C_2 & S_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -S_2 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -l_1 \\ S_1 & -C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C_2C_1 & C_2S_1 & S_2 & -l_1S_2 \\ -S_1 & C_1 & 1 & 0 \\ -S_2C_1 & -S_2S_1 & C_2 & -l_1C_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Eligiendo el elemento (1,4):

$$C_2C_1p_x + C_2S_1p_y + S_2p_z - l_1S_2 = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\boldsymbol{\theta_2} = \arctan -\frac{C_1p_x + S_1p_y}{p_z - l_1}}$$

Eligiendo el elemento (3,4):

$$-S_2C_1p_x - S_2S_1p_y + C_2p_z - C_2l_1 = d_3 \;\Rightarrow\; \boxed{\mathbf{d_3} = C_2(p_z - l_1) - S_2(C_1p_x + S_1p_y)}$$

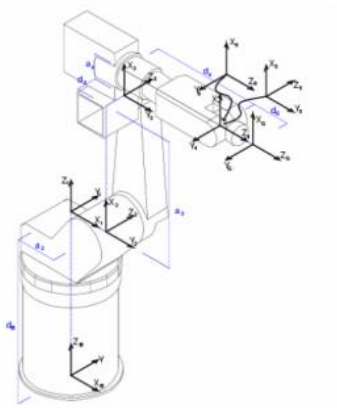
cambio en la posición final del extremo real del robot, su verdadero objetivo es poder orientar la herramienta del robot libremente en el espacio.

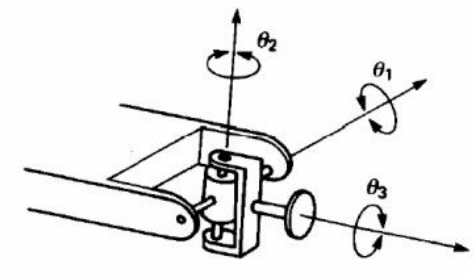
El método de desacoplo cinemático saca partido de este hecho, separando ambos problemas: Posición y orientación.

Para ello, dada una posición y orientación final deseadas, establece las coordenadas del punto de corte de los 3 últimos ejes (muñeca del robot) calculándose los valores de las tres primeras variables articulares (q1, q2, q3) que consiguen posicionar este punto.

A partir de los datos de orientación y de los ya calculados (q1, q2, q3) se obtiene los valores del resto de las variables articulares.

Es típico en robots de 6 GDL





Se puede resolver de forma explícita los 3GDL que definen la orientación de la garra.

Para esta clase de manipuladores la cinemática inversa se puede resumir por el siguiente algoritmo:

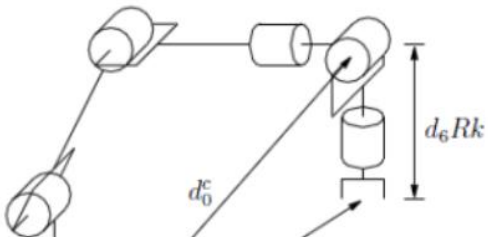
Paso 1: Encontrar q1, q2, q3 de tal manera que la muñeca de centro oc tiene coordenadas dadas por

$$o_c^0 = o - d_6 R \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

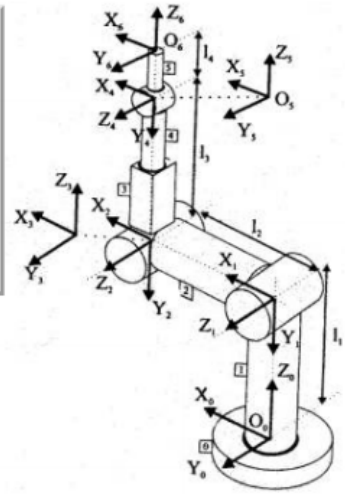
Paso 2: Usando las variables determinadas en el paso 1, evaluar 0R3.

Paso 3: Buscar un conjunto de ángulos de Euler correspondientes a la matriz de rotación.

$$R_6^3 = (R_3^0)^{-1} R = (R_3^0)^T R.$$



Parámetros DH del robot de la figura.				
Articulación	θ	d	a	α
1	Ø1	I1	0	-90°
2	Ø2	0	I2	0
3	Ø3	0	0	90°
4	Ø4	I3	0	-90°
5	Ø5	0	0	90°
6	Ø6	I4	0	0



Se utilizaran los vectores Pm y Pr, que van desde el origen del sistema asociado a la base del robot (S0) hasta los puntos centro de la muñeca y fin del robot, respectivamente. Es posible, mediante un método geométrico, calcular los valores de (q1, q2, q3) que consiguen posicionar el robot en el Pm deseado. Queda ahora obtener los valores de q4, q5, q6 que consiguen la orientación deseada.

Para ello se denomina 0R6 a la submatriz de rotación de 0T6 se tendrá:

0R6 = (n o a) = 0R3(3R6)

Donde 0R6 es conocida por la orientación deseada del extremo del robot, y 0R3 definida por: 0R3 = 0A1 (1A2)(2A3), lo será a partir de los valores ya obtenidos de q1, q2 y q3.

Por lo tanto: 3R6 = (Rij) = (1/0R3)(0R6) = (0R)(exp)T (n o a) tendrá sus componentes numéricas conocidas.

Por otra parte, 3R6 corresponde a una submatriz 3X3 de rotación de la matriz de transformación homogénea 3T6, que relaciona el sistema (S3) con el

(S6), por lo tanto: 3R6 = 3A4 (4A5)(5A6).

Donde i-1Ri es la submatriz de rotación de la matriz de DH i-1Ai, cuyos valores son:

$$\overset{3R4}{\begin{vmatrix} C4 & 0 & -S4 \\ S4 & 0 & C4 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}} \quad \overset{4R5}{\begin{vmatrix} C5 & 0 & S5 \\ S5 & 0 & -C5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}} \quad \overset{5R6}{\begin{vmatrix} C6 & -S6 & 0 \\ S6 & C6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}$$

Luego se tiene que:

$$3R6 = \begin{vmatrix} C4C5C6-S4S6 & -C4C5S6-S4C6 & C4S5 \\ S4C5C6 + C4S6 & -S4C5S6 + C4C6 & -S4C5 \\ -S5C6 & S5S6 & C5 \end{vmatrix}$$

Donde Rij, será por valores numéricos conocidos:

$$Rij = \begin{vmatrix} C4C5C6-S4S6 & -C4C5S6-S4C6 & C4S5 \\ S4C5C6 + C4S6 & -S4C5S6 + C4C6 & -S4C5 \\ -S5C6 & S5S6 & C5 \end{vmatrix}$$

De esas nueve relaciones expresadas se toma las correspondientes a 1R3, 2R3, 3R3, 3R1, 3R2

$$R13 = C4S5$$
$$R23 = -S4C5$$
$$R33 = C5$$
$$R31 = -S5C6$$
$$R32 = S5S6$$

Del conjunto de ecuaciones es inmediato obtener los parámetros articulares:

$$q4 = \text{arcsen}\,(R23 / R33)$$
$$q5 = \arccos\,(R33)$$
$$q6 = \text{arctg}\,(-R32 / R31)$$

Estas expresiones y teniendo en cuenta que las posiciones de cero son distintas, constituyen la solución completa del problema cinemático inverso del robot articular.

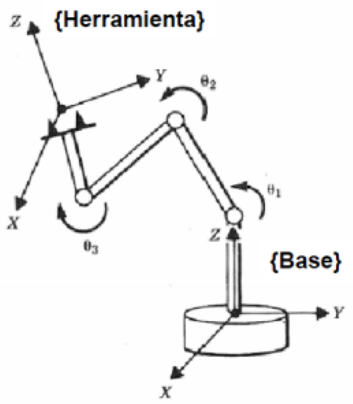
Cinemática directa VS cinemática inversa

- **Cinemática directa**
  - **Conocidos:** Ángulos articulares y geometría de los eslabones
  - **Determinar:** Posición y orientación del elemento terminal referido a la base

$$f(\theta) = {}^{B}_{H}T = {}^{0}_{N}T$$

- **Cinemática inversa**
  - **Conocidos:** Posición y orientación del elemento terminal referido a la base
  - **Determinar:** Ángulos articulares y geometría de los eslabones para alcanzar la orientación y posición de la herramienta

$$\theta = f^{-1}({}^{B}_{H}T) = f^{-1}({}^{N}_{0}T)$$



Bibliografía

- http://proton.ucting.udg.mx/materias/robotica/r166/r91/r91.htm
- http://www.kramirez.net/wp-content/uploads/2012/04/CinematicaInversaRobot.pdf
- Fu, K.S.; González, R.C. y Lee, C.S.G. Robotics: Control, Sensing, Vision, and Intelligence. McGraw-Hill.