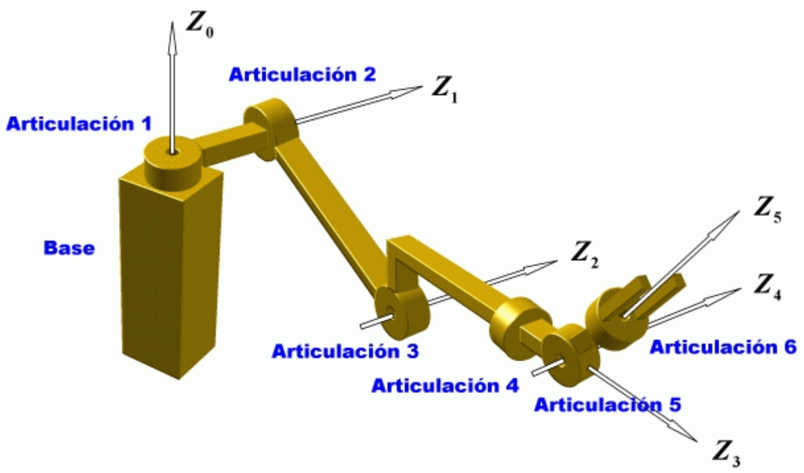
La representación Denavit-Hartenberg

José Cortés Parejo. Marzo 2008

Se trata de un procedimieto sistemático para describir la estructura cinemática de una cadena articulada constituida por articulaciones con. un solo grado de libertad.
Para ello, a cada articulación se le asigna un **Sistema de Referencia Local** con origen en un punto Q_i y ejes ortonormales $\{X_i, Y_i, Z_i\}$, comenzando con un primer S.R fijo e inmóvil dado por los ejes $\{X_0, Y_0, Z_0\}$, anclado a un punto fijo Q_0 de la **Base** sobre la que está montada toda la estructura de la cadena.
Este Sistema de Referencia no tiene por qué ser el Universal con origen en $(0,0,0)$ y la Base canónica.

1. Asignación de Sistemas de Referencia

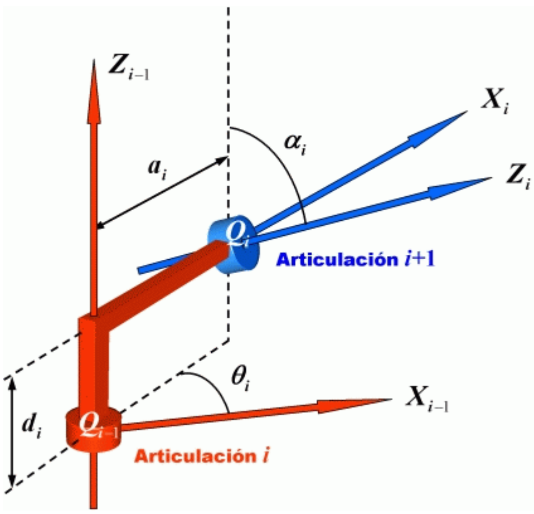
Las articulaciones se numeran desde 1 hasta n. A la articulación i-ésima se le asocia su propio eje de rotación como Eje Z_{i-1}, de forma que el eje de giro de la 1ª articulación es Z_0 y el de la n-ésima articulación, Z_{n-1}. En la Figura adjunta se muestra la estructura del Robot PUMA junto con sus articulaciones y ejes de rotación.



Para la articulación i-ésima (que es la que gira alrededor de Z_{i-1}), la elección del origen de coordenadas Q_i y del Eje X_i sigue reglas muy precisas en función de la geometría de los brazos articulados. el Eje Y_i por su parte, se escoge para que el sistema $\{X_i, Y_i, Z_i\}$ sea dextrógiro.
La especificación de cada Eje X_i depende de la relación espacial entre Z_i y Z_{i-1}, distinguiéndose 2 casos:

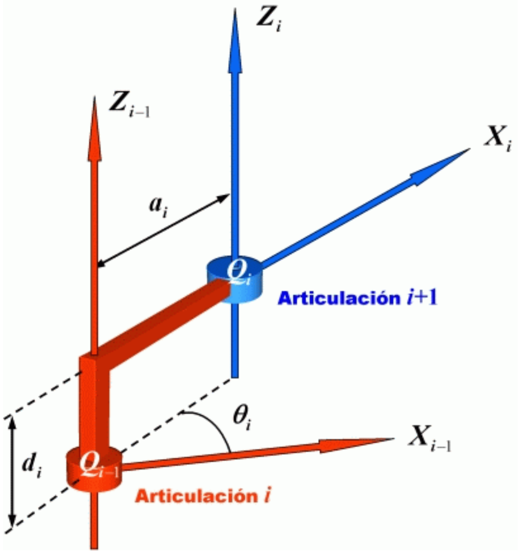
1- Z_i y Z_{i-1} no son paralelos

Entonces existe una única recta perpendicular a ambos, cuya intersección con los ejes proporciona su mínima distancia (que puede ser 0). Esta distancia, a_i, medida desde el eje Z_{i-1} hacia el eje Z_i (con su signo), es uno de los parámetros asociados a la articulación i-ésima.
La distancia d_i desde Q_{i-1} a la intersección de la perpendicular común entre Z_{i-1} y Z_i con Z_{i-1} es el 2º de los parámetros.
En este caso, el Eje X_i es esta recta, siendo el sentido positivo el que va desde el Eje Z_{i-1} al Z_i si $a_i > 0$.
El origen de coordenadas Q_i es la intersección de dicha recta con el Eje Z_i.



2- Z_i y Z_{i-1} son paralelos

En esta situación el Eje X_i se toma en el plano conteniendo a Z_{i-1} y Z_i y perpendicular a.ambos.
El origen Q_i es cualquier punto conveniente del eje Z_i.
El parámetro a_i es, como antes, la distancia perpendicular entre los ejes Z_{i-1} y Z_i, y d_i es la distancia desde Q_{i-1}.



Una vez determinado el Eje X_i, a la articulación i-ésima se le asocia un 3[er] parámetro fijo α_i que es el ángulo que forman los ejes Z_{i-1} y Z_i en relación al eje X_i.
Nótese que cuando el brazo i-ésimo (que une rígidamente las articulaciones i e $i+1$) gira en torno al eje Z_{i-1} (que es el de rotación de la articulación i), los parámetros a_i, d_i y α_i permanecen constantes, pues dependen exclusivamente de las posiciones/orientaciones relativas entre los ejes Z_{i-1} y Z_i, que son invariables. Por tanto, a_i, d_i y α_i pueden calcularse a partir de cualquier configuración de la estructura articulada, en particular a partir de una configuración inicial estándar. Precisamente el ángulo θ_i de giro que forman los ejes X_{i-1} y X_i con respecto al eje Z_{i-1} es el 4º parámetro asociado a la articulación i y el único de ellos que varía cuando el brazo i gira.

Es importante observar que el conjunto de los 4 parámetros a_i, d_i, α_i y θ_i determina totalmente el Sistema de Referencia de la articulación $i+1$ en función del S.R de la articulación i.

2. Transformación de coordenadas

De los 4 parámetros asociados a una articulación, los 3 primeros son constantes y dependen exclusivamente de la relación geométrica entre las articulaciones i e $i+1$, mientras que el 4º parámetro θ_i es la única variable de la articulación, siendo el ángulo de giro del eje X_{i-1} alrededor del eje Z_{i-1} para llevarlo hasta X_i.
Sabemos que dados 2 Sistemas de Referencia $\mathbf{R}_1 = \{ Q_1, [u_1,u_2,u_3] \}$ y $\mathbf{R}_2 = \{ Q_2, [v_1,v_2,v_3] \}$ con Bases ortonormales asociadas, el cambio de coordenadas del segundo S.R. al primero viene dado por:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & \lambda_1 \\ & R & & \lambda_2 \\ & & & \lambda_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

donde $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ son las coordenadas de un punto en el S.R $\mathbf{R}_2$, R es la matriz del Cambio de Base tal que $[v_1 | v_2 | v_3] = [u_1 | u_2 | u_3] \cdot R$ y $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ son las coordenadas del origen del segundo S.R., Q_2 respecto al primero. La expresión permite entonces obtener las coordenadas $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ del punto en cuestión con respecto al primero de los S.R.
En nuestro caso, para pasar de la $(i+1)$-ésima articulación a la i-ésima, los Sistemas de Referencia son $\mathbf{R}_1 = \{ Q_{i-1}, [X_{i-1}, Y_{i-1}, Z_{i-1}] \}$ y $\mathbf{R}_2 = \{ Q_i, [X_i, Y_i, Z_i] \}$.
Estudiaremos por separado la matriz del Cambio de Base y la expresión de Q_i en en el primer S.R.

2.1 Matriz del Cambio de Base

Habiendo asignado los ejes a cada articulación mediante la representación Denavit-Hartenberg, tenemos que:

1- El eje X_i se obtiene rotando el eje X_{i-1} alrededor del eje Z_{i-1} un ángulo θ_i.

2- El eje Z_i se obtiene rotando el eje Z_{i-1} alrededor del eje X_i un ángulo α_i.

Por su parte, el eje Y_i viene ya determinado por X_i y Z_i.

- La primera transformación es una rotación alrededor del 3er vector de la 1ª Base, cuyas ecuaciones genéricas son:

$$\left[u_1^{(1)} \,|\, u_2^{(1)} \,|\, u_3^{(1)} \right] = \left[u_1 \,|\, u_2 \,|\, u_3 \right] R_3(\theta_i)$$

- La segunda transformación es una rotación alrededor del 1er vector de la Base ya transformada, y tiene por expresión:

$$\left[u_1^{(2)} \,|\, u_2^{(2)} \,|\, u_3^{(2)} \right] = \left[u_1^{(1)} \,|\, u_2^{(1)} \,|\, u_3^{(1)} \right] R_1(\alpha_i)$$

Por tanto, concatenándolas: $\left[u_1^{(2)} \,|\, u_2^{(2)} \,|\, u_3^{(2)} \right] = \left[u_1 \,|\, u_2 \,|\, u_3 \right] R_3(\theta_i) R_1(\alpha_i)$

Finalmente, cambiamos la notación para tener: $\left[X_i \,|\, Y_i \,|\, Z_i \right] = \left[X_{i-1} \,|\, Y_{i-1} \,|\, Z_{i-1} \right] R_3(\theta_i) R_1(\alpha_i)$

Con lo cual, la **matriz del Cambio de Base es**:

$$R = R_3(\theta_i) R_1(\alpha_i) = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\operatorname{sen}\theta_i & 0 \\ \operatorname{sen}\theta_i & \cos\theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_i & -\operatorname{sen}\alpha_i \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha_i & \cos\alpha_i \end{bmatrix}$$

$$\boxed{R = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\operatorname{sen}\theta_i \cos\alpha_i & \operatorname{sen}\theta_i \operatorname{sen}\alpha_i \\ \operatorname{sen}\theta_i & \cos\theta_i \cos\alpha_i & -\cos\theta_i \operatorname{sen}\alpha_i \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha_i & \cos\alpha_i \end{bmatrix}}$$

2.2 Coordenadas de Q_i en el primer S.R.

Según la representación de Denavit-Hartenberg, el origen del 2º Sistema de Referencia se obtiene mediante:

1- Traslación de Q_{i-1} a lo largo del eje Z_{i-1} por la magnitud d_i.

2- Traslación a lo largo del eje X_i por la magnitud a_i.

- La primera transformación es: $Q_{i-1}^{(1)} = Q_{i-1} + d_i Z_{i-1}$

- La segunda transformación es: $Q_i = Q_{i-1}^{(1)} + a_i X_i$

Teniendo ahora en cuenta que:

$$\left[X_i \mid Y_i \mid Z_i \right] = \left[X_{i-1} \mid Y_{i-1} \mid Z_{i-1} \right] \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\text{sen}\theta_i \cos\alpha_i & \text{sen}\theta_i \text{sen}\alpha_i \\ \text{sen}\theta_i & \cos\theta_i \cos\alpha_i & -\cos\theta_i \text{sen}\alpha_i \\ 0 & \text{sen}\alpha_i & \cos\alpha_i \end{bmatrix}$$

Se tiene, para el 1er vector:

$$X_i = \left[X_{i-1} \mid Y_{i-1} \mid Z_{i-1} \right] \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta_i \\ \text{sen}\theta_i \\ 0 \end{bmatrix} = \cos\theta_i \cdot X_{i-1} + \text{sen}\theta_i \cdot Y_{i-1}$$

de donde: $Q_i = Q_{i-1}^{(1)} + a_i X_i = Q_{i-1} + d_i Z_{i-1} + a_i(\cos\theta_i \cdot X_{i-1} + \text{sen}\theta_i \cdot Y_{i-1})$

$$Q_i = Q_{i-1} + (a_i \cos\theta_i) X_{i-1} + (a_i \text{sen}\theta_i) Y_{i-1} + d_i Z_{i-1}$$

y por tanto, las coordenadas de Q_i en el 1er Sistema de Referencia son:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_i \cos\theta_i \\ a_i \text{sen}\theta_i \\ d_i \end{bmatrix}$$

Finalmente, la transformación de coordenadas del S.R. $Q_i, [X_i, Y_i, Z_i]$ al S.R. $Q_{i-1}, [X_{i-1}, Y_{i-1}, Z_{i-1}]$ es:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\text{sen}\theta_i \cos\alpha_i & \text{sen}\theta_i \text{sen}\alpha_i \\ \text{sen}\theta_i & \cos\theta_i \cos\alpha_i & -\cos\theta_i \text{sen}\alpha_i \\ 0 & \text{sen}\alpha_i & \cos\alpha_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_i \cos\theta_i \\ a_i \text{sen}\theta_i \\ d_i \end{bmatrix}$$

Cambiando la notación para las coordenadas:

$$\begin{bmatrix} x_{i-1} \\ y_{i-1} \\ z_{i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\text{sen}\theta_i \cos\alpha_i & \text{sen}\theta_i \text{sen}\alpha_i \\ \text{sen}\theta_i & \cos\theta_i \cos\alpha_i & -\cos\theta_i \text{sen}\alpha_i \\ 0 & \text{sen}\alpha_i & \cos\alpha_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_i \cos\theta_i \\ a_i \text{sen}\theta_i \\ d_i \end{bmatrix}$$

Donde el subíndice denota el Sistema de Referencia respecto al cual están expresadas las coordenadas.

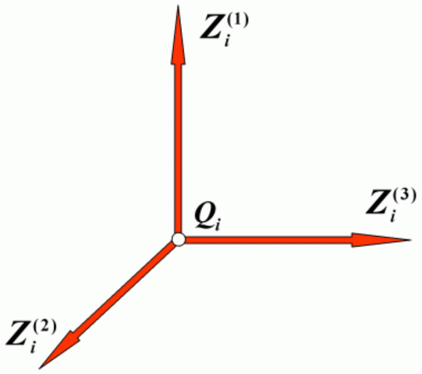
En coordenadas homogéneas:

$$\begin{bmatrix} x_{i-1} \\ y_{i-1} \\ z_{i-1} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\text{sen}\theta_i \cos\alpha_i & \text{sen}\theta_i \text{sen}\alpha_i & a_i \cos\theta_i \\ \text{sen}\theta_i & \cos\theta_i \cos\alpha_i & -\cos\theta_i \text{sen}\alpha_i & a_i \text{sen}\theta_i \\ 0 & \text{sen}\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. Articulaciones compuestas con 2 o 3 Grados de libertad

Un caso muy frecuente es el de las articulaciones del cuerpo humano o de un animal en el que un hueso puede girar respecto al anterior en 2 o 3 ejes que se cortan en un mismo punto y más aún, podemos suponer que los ejes son mutuamente perpendiculares.
Cada uno de estos ejes de rotación constituye una articulación en el sentido de la representación Denavit-Hartenberg, pero para esta situación especial resulta conveniente cambiar la notación vista en la sección anterior y denominar a los Sistemas de Referencia como:

- **Para el 1^er^ grado de libertad:** Ejes: $X_i^{(1)}, Y_i^{(1)}, Z_i^{(1)}$
- **Para el 2º grado de libertad:** Ejes: $X_i^{(2)}, Y_i^{(2)}, Z_i^{(2)}$
- **Para el 3^er^ grado de libertad:** Ejes: $X_i^{(3)}, Y_i^{(3)}, Z_i^{(3)}$



Y los 3 Sistemas de Referencia tiene origen común Q_i.
Supondremos además que $Z_i^{(2)}$ es perpendicular a $Z_i^{(1)}$, $Z_i^{(3)} = Z_i^{(1)} \otimes Z_i^{(2)}$ y la siguiente articulación con 3 DOF tiene su origen en $Q_{i+1} = r_i \cdot X_i^{(3)}$ y 1^er^ eje de rotación $Z_{i+1}^{(1)} = X_i^{(3)}$

3.1 Transformación para la 1ª articulación: Los parámetros Denavit-Hartenberg $a_i^{(1)}, d_i^{(1)}$ para la 1ª articulación son ambos nulos y $X_i^{(2)} = Z_i^{(1)} \otimes Z_i^{(2)}$ con lo cual $\alpha_i^{(1)} = 90^\circ$ y la matriz de transformación es:

$$\begin{bmatrix} x_i^{(1)} \\ y_i^{(1)} \\ z_i^{(1)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{i1} & 0 & \operatorname{sen}\theta_{i1} & 0 \\ \operatorname{sen}\theta_{i1} & 0 & -\cos\theta_{i1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_i^{(2)} \\ y_i^{(2)} \\ z_i^{(2)} \\ 1 \end{bmatrix}$$

3.2 Transformación para la 2ª articulación: Los parámetros Denavit-Hartenberg $a_i^{(2)}, d_i^{(2)}$ para la 2ª articulación son ambos nulos y $X_i^{(3)} = Z_i^{(2)} \otimes Z_i^{(3)}$ con lo cual $\alpha_i^{(2)} = 90^\circ$ y la matriz de transformación es:

$$\begin{bmatrix} x_i^{(2)} \\ y_i^{(2)} \\ z_i^{(2)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{i2} & 0 & \operatorname{sen}\theta_{i2} & 0 \\ \operatorname{sen}\theta_{i2} & 0 & -\cos\theta_{i2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_i^{(3)} \\ y_i^{(3)} \\ z_i^{(3)} \\ 1 \end{bmatrix}$$

3.2 Transformación para la 3ª articulación: Los parámetros Denavit-Hartenberg $a_i^{(3)}, d_i^{(3)}$ para la 3ª articulación son $a_i^{(3)} = 0$ y $d_i^{(3)} = r_i$ pues estamos suponiendo $Q_{i+1} = r_i \cdot X_i^{(3)}$. Por otra parte, $X_{i+1}^{(1)} = Z_i^{(3)} \otimes Z_{i+1}^{(1)}$ de froma que $\alpha_i^{(3)} = 90^\circ$ y la matriz de transformación es:

$$\begin{bmatrix} x_i^{(3)} \\ y_i^{(3)} \\ z_i^{(3)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{i3} & 0 & \operatorname{sen}\theta_{i3} & 0 \\ \operatorname{sen}\theta_{i3} & 0 & -\cos\theta_{i3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & r_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{i+1}^{(1)} \\ y_{i+1}^{(1)} \\ z_{i+1}^{(1)} \\ 1 \end{bmatrix}$$

La Transformación total de la articulación con origen en Q_{i+1} y 3 DOF a la articulación con origen en Q_i y 3 DOF es:

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{i1} & 0 & \mathrm{sen}\theta_{i1} & 0 \\ \mathrm{sen}\theta_{i1} & 0 & -\cos\theta_{i1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta_{i2} & 0 & \mathrm{sen}\theta_{i2} & 0 \\ \mathrm{sen}\theta_{i2} & 0 & -\cos\theta_{i2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta_{i3} & 0 & \mathrm{sen}\theta_{i3} & 0 \\ \mathrm{sen}\theta_{i3} & 0 & -\cos\theta_{i3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & r_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \\ z_{i+1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

4. Consideraciones finales

La representación Denavit-Hartenberg presupone que cuando se realiza una rotación alrededor de uno de los ejes, digamos Z_{i-1}, la orientación del eje Z_i varía debido a la acción del brazo que los une (exceptuando el caso en el que Z_{i-1} y Z_i son paralelos), aunque naturalmente el ángulo α_i entre ambos ejes permanece constante.
Esta observación implica que es imposible que el eje Z_i tenga una orientación constante e independiente de la rotación que se efectúe alrededor de Z_{i-1}, lo cual implica que la transformación de un sistema a otro no puede en ningún caso expresarse como una rotación de ángulos de Euler de **Ejes Fijos**, como la RPY.

Bibliografía

Barrientos, A.; Peñín, L.F,; Balaguer, C. & Aracil, R.
Fundamentos de Robótica 2ª Ed.
McGraw-Hill, 2007

Fu, K.S.; González, R.C. & Lee, C.S.G.
Robótica: Control, detección, visión e inteligencia
McGraw-Hill, 1988