UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID
E.T.S. de Ingenieros Agrónomos
Dpto. Física y Mecánica

Sistemas de coordenadas y sistemas de referencia

La descripción del movimiento de un cuerpo requiere la introducción de un sistema de coordenadas espaciales que identifiquen unívocamente cada punto del espacio, y una coordenada temporal, la cual determina el orden cronológico de sucesos en cualquier punto del espacio.

*A este conjunto de coordenadas espacio-temporal se denomina **sistema de referencia.***

1. Sistemas de referencia

Un sistema de referencia viene dado por un punto de referencia denominado origen y un sistema de coordenadas. El origen de coordenadas es el punto de referencia de un sistema de coordenadas y en él el valor de todas las coordenadas del sistema es nulo.

Sobre cada uno de los ejes se definen vectores unitarios, denominados versores, que indican la dirección del eje.

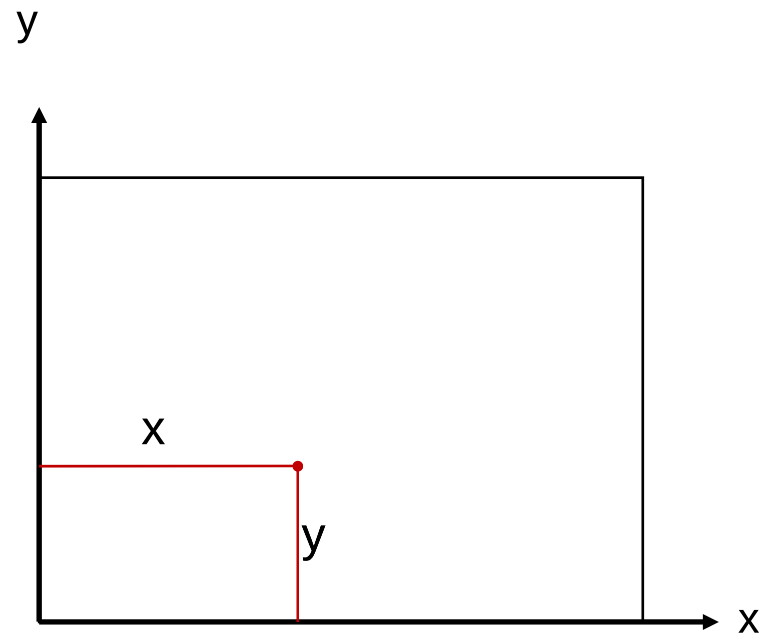
2. Sistemas de coordenadas

*Un **sistema de coordenadas** es un conjunto de valores y puntos que permiten definir unívocamente la posición de cualquier punto de un espacio euclídeo.*

*El primero que expresó la posición de un punto en el plano o en el espacio fue Descartes, por lo que se suele referir a ellas como **coordenadas cartesianas**.*

Para representar un punto en un plano, utilizó dos rectas perpendiculares entre sí, de forma que la posición del punto se determinaba midiendo sobre los ejes las distancias al punto.

*Sobre dichas rectas se definen **vectores unitarios o versores** perpendiculares entre sí que son vectores de módulo unidad, que determinan una base ortonormal.*

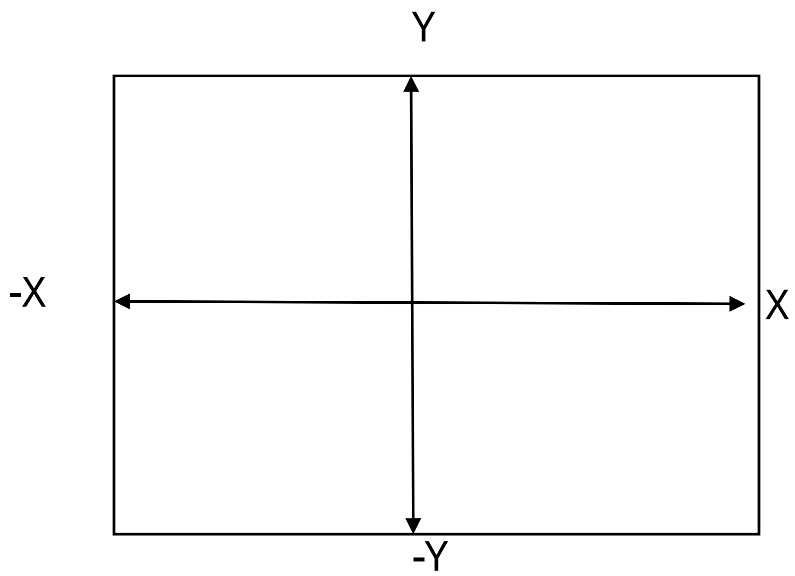


2.1. Sistema de coordenadas cartesianas (x,y,z)

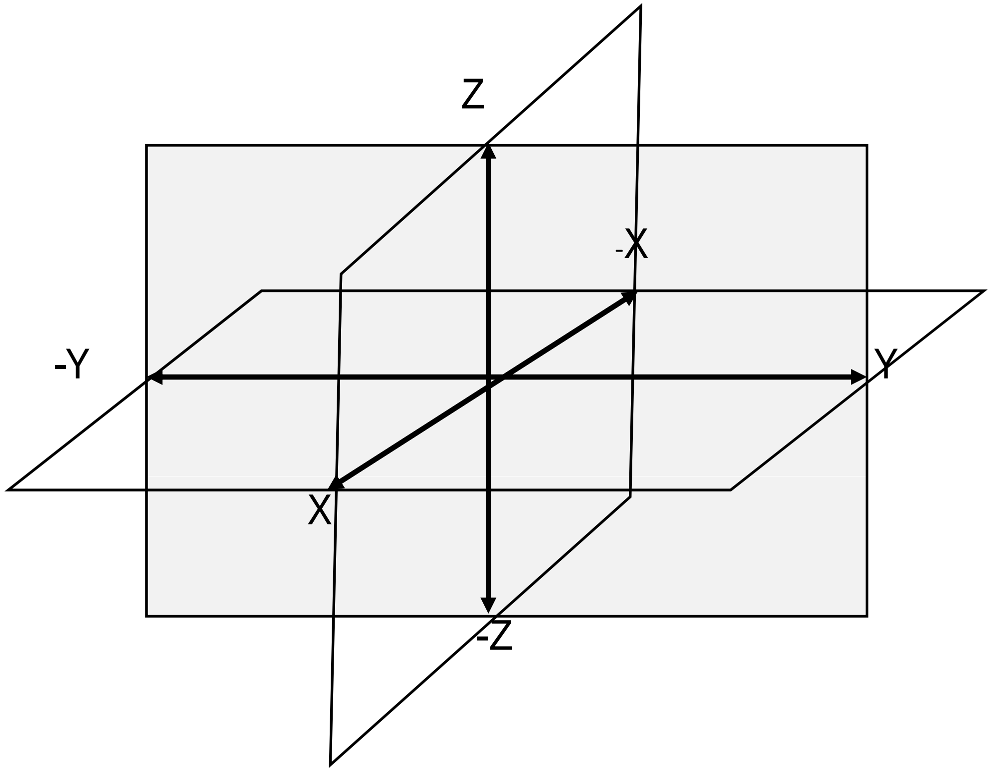
*Un sistema de **coordenadas cartesianas** se define por dos ejes ortogonales en un sistema bidimensional y tres ejes ortogonales en un sistema tridimensional, que se cortan en el origen O.*

Las coordenadas de un punto cualquiera vendrán dadas por las proyecciones del vector de posición del punto sobre cada uno de los ejes.

2.1. Sistema de coordenadas cartesianas (x,y,z)



2D



3D

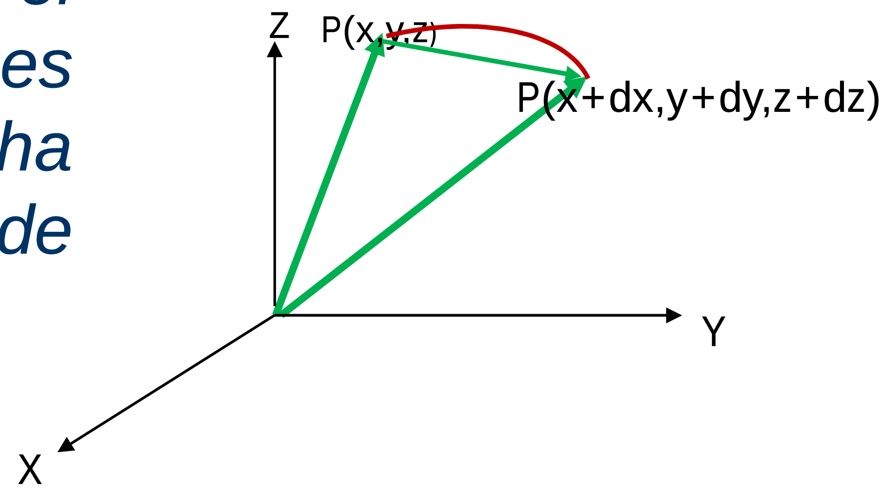
Dado un vector $\vec{r}$ del espacio tridimensional y tres planos que se cortan en el punto de origen de $\vec{r}$, se definen las ***coordenadas cartesianas (x,y,z)*** *como las tres proyecciones ortogonales del vector sobre las tres aristas de intersección de los planos perpendiculares; los tres planos se identifican por yz, zx, xy respectivamente.*

En un sistema de coordenadas cartesianas se definen los versores ***(*** $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$*) en la dirección de los ejes x, y, z respectivamente.*

Variación infinitesimal de las coordenadas

Si las coordenadas del punto varían infinitesimalmente en el espacio, siendo tales variaciones dx, dy, dz, la variación que ha experimentado el vector de posición es

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$



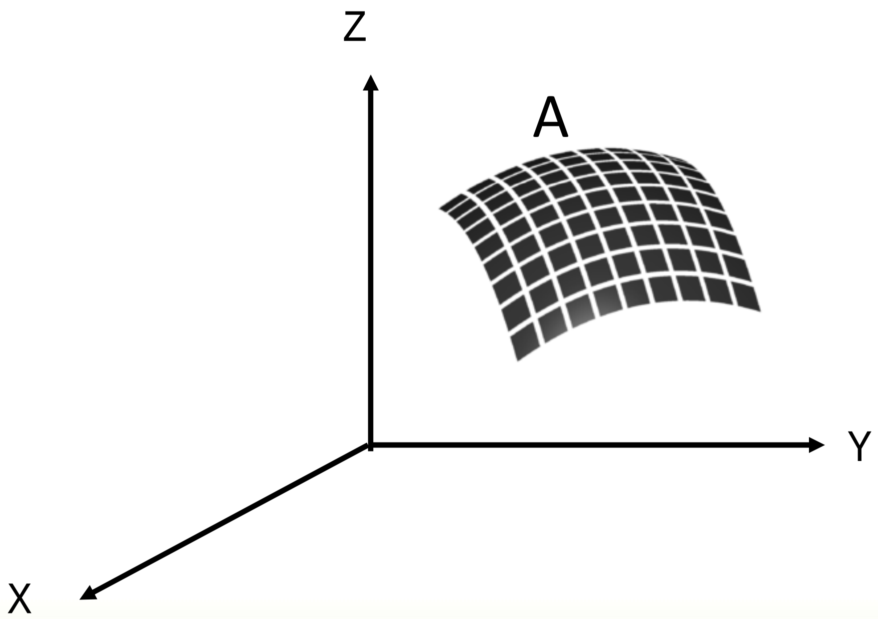
y el punto habrá recorrido un elemento diferencial de arco

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

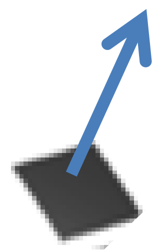
Elemento diferencial de superficie

Dada la superficie A, seleccionamos un elemento diferencial de superficie.

El vector característico de la superficie (dA), tiene tres componentes, cada una de ellas dirigida sobre cada uno de los ejes.

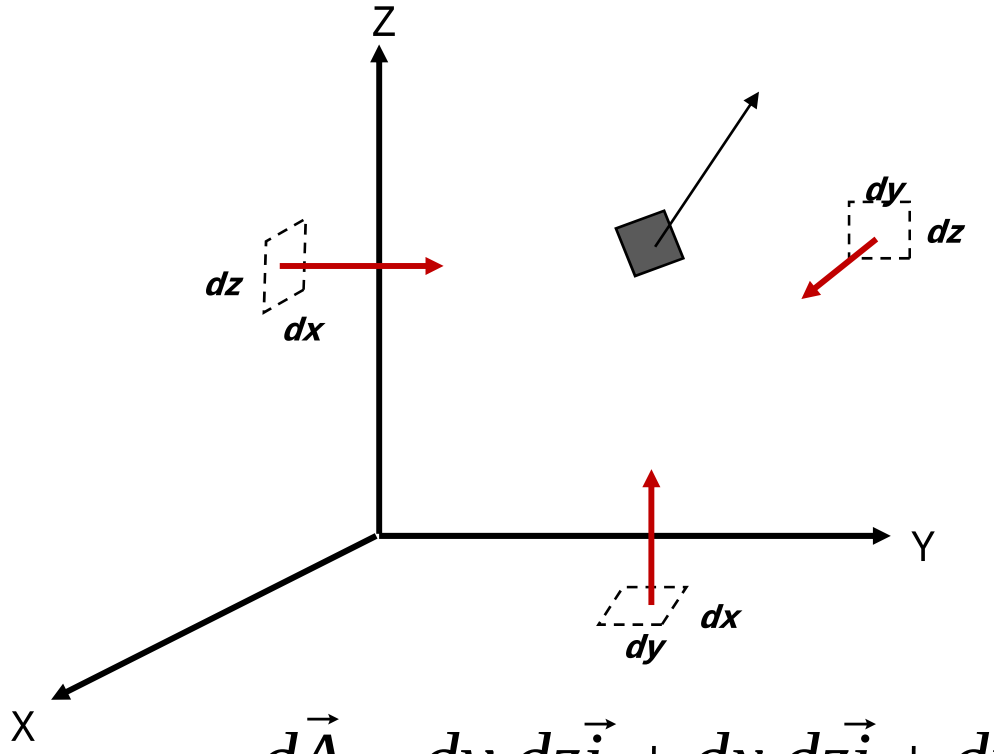


$$d\vec{A} = dA_x\vec{i} + dA_y\vec{j} + dA_z\vec{k}$$



Elemento diferencial de superficie

Los valores de las componentes se obtienen proyectando el elemento diferencial de superficie sobre los tres planos coordenados

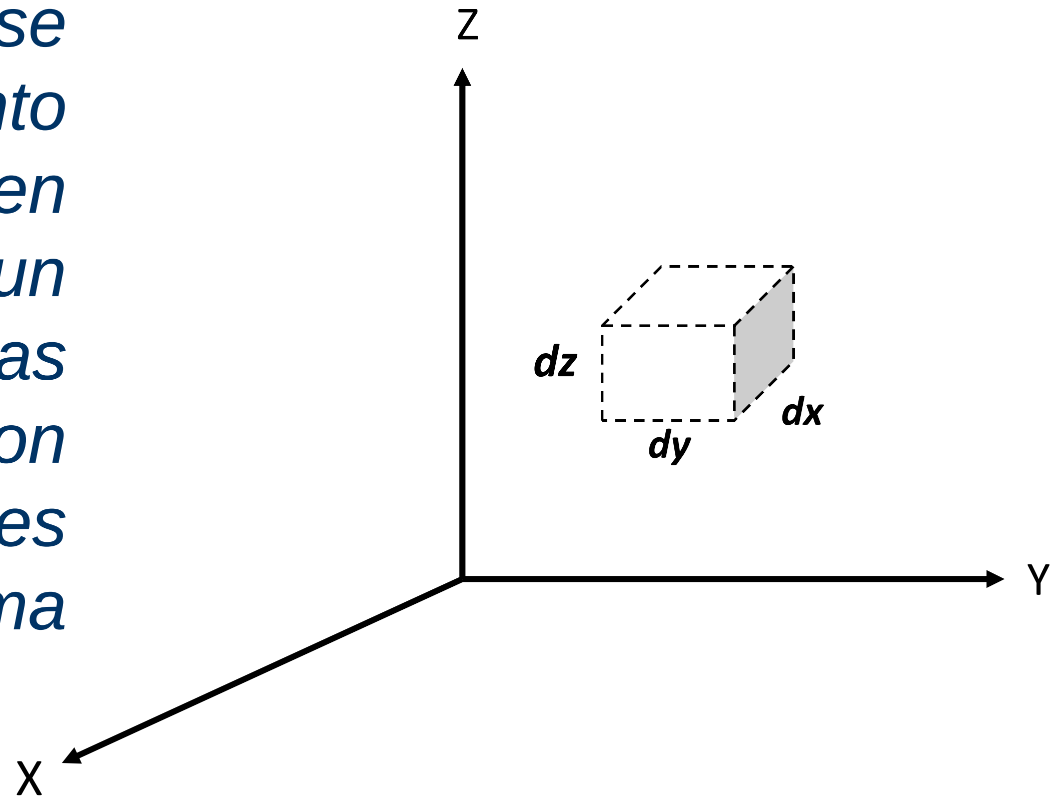


$$d\vec{A} = dy \cdot dz\vec{i} + dx \cdot dz\vec{j} + dx \cdot dy\vec{k}$$

Elemento diferencial de volumen

Dada un volumen V, se selecciona un elemento diferencial de volumen formado por un paralelepípedo cuyas aristas (dx, dy, dz) son paralelas a los ejes coordenados, de forma que

$$dV = dx \cdot dy \cdot dz$$



2.2. **Sistema de coordenadas polares (r, θ)**

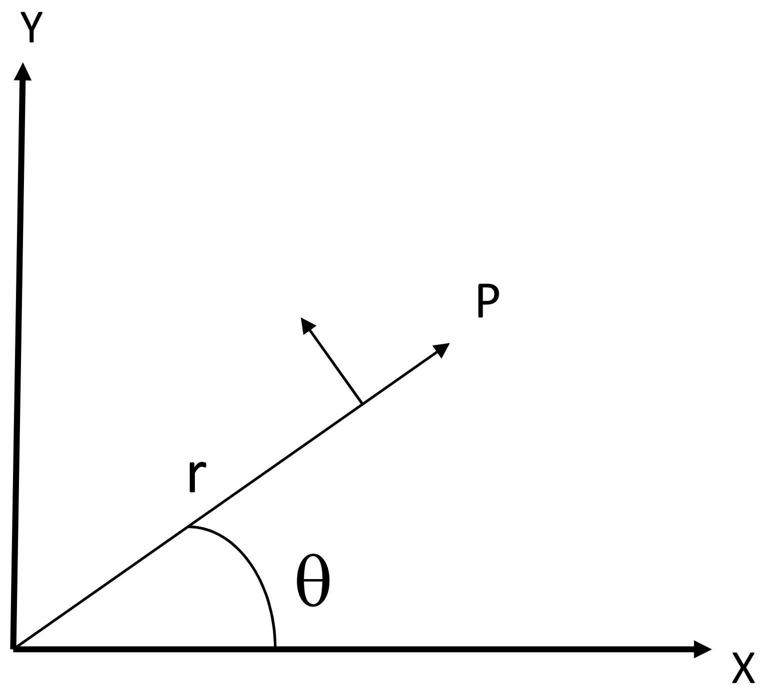
Para representar puntos en el plano se utiliza en muchas ocasiones el sistema de **coordenadas polares**

En este sistema se necesitan un *ángulo* (θ) y una *distancia* (r).

Para medir θ, en radianes, necesitamos una semirrecta dirigida llamada **eje polar** y para medir r, un punto fijo llamado **polo**.

2.2. **Sistema de coordenadas polares (r, θ)**

Para expresar la posición de un punto P en coordenadas polares (r,θ), se define un vector unitario $\vec{u}_r$ que indique la dirección de la línea radial que une el origen O y P, y un vector unitario $\vec{u}_\theta$ perpendicular a $\vec{u}_r$ orientado hacia valores crecientes de θ.



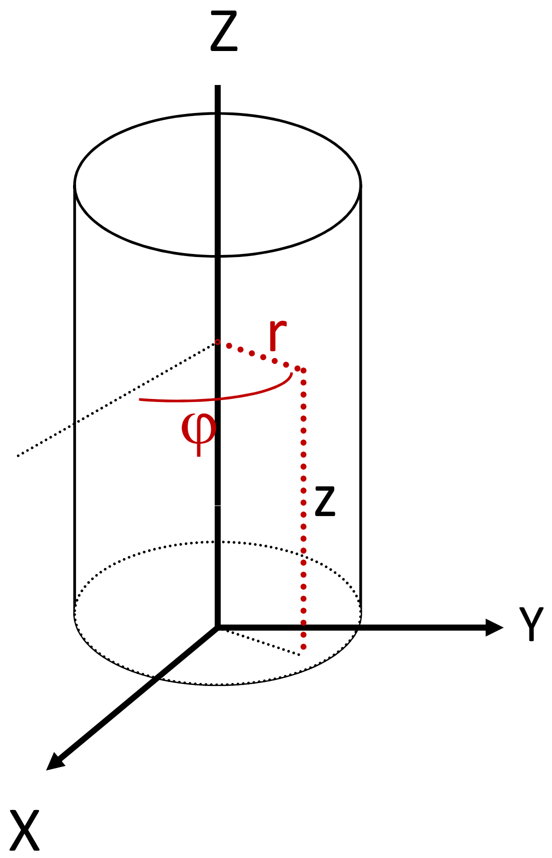
$$\vec{OP} = \vec{r} = r\vec{u}_r$$

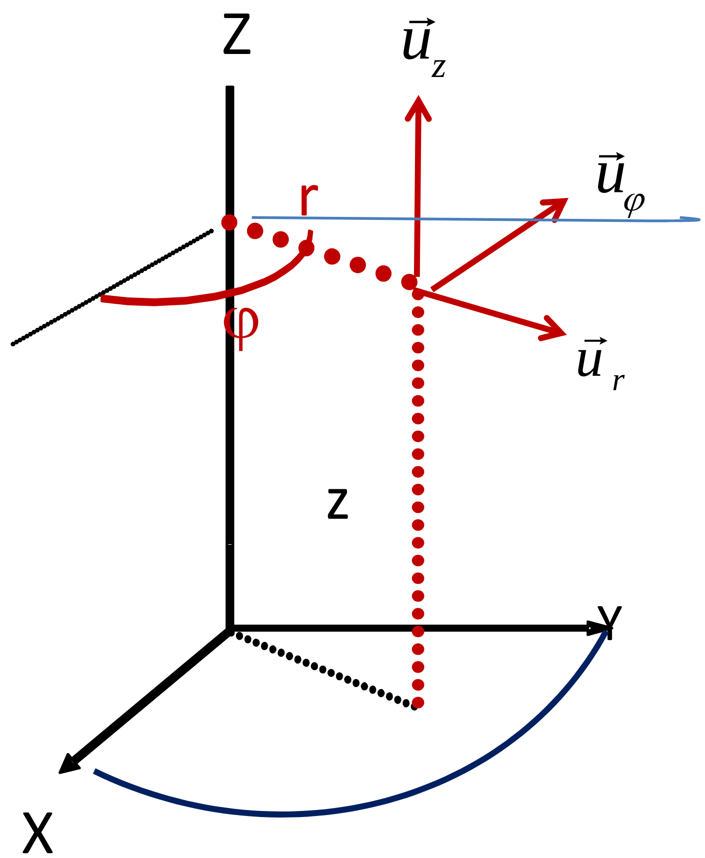
2.3. Sistema de coordenadas cilíndricas (r, φ,z)

La primera coordenada es la distancia (r) existente entre el origen y el punto, la segunda es el ángulo (φ) que forman el eje y la recta que pasa por ambos puntos, y la tercera es la coordenada (z) que determina la altura del cilindro.

Se definen tres vectores unitarios, $\vec{u}_r$ $\vec{u}_\varphi$, $\vec{u}_z$ y perpendiculares entre sí que forman una base ortonormal.

2.3. Sistema de coordenadas cilíndricas (r, φ,z)





2.3. Sistema de coordenadas cilíndricas (r, φ,z)

Las coordenadas cilíndricas r y φ son las coordenadas polares de P medidas en el plano paralelo XY que pasan por él, y las definiciones de los vectores unitarios y no cambian. La posición de P perpendicular al plano XY se mide por la coordenada z.

Consideramos un cilindro de radio R y altura H, la posición del punto P viene dada por

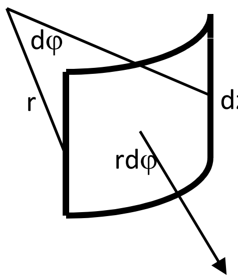
$$x = r\cos\varphi \qquad y = rsen\varphi \qquad z = z$$

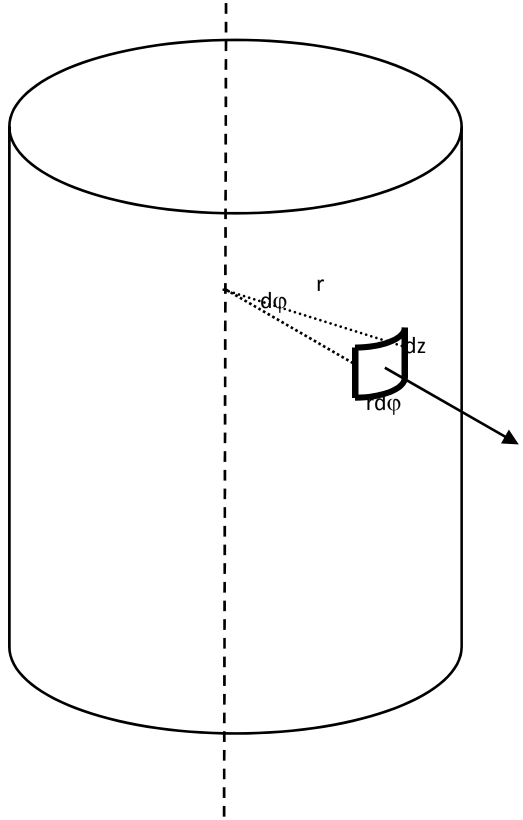
2.3. Sistema de coordenadas cilíndricas (r, φ,z)

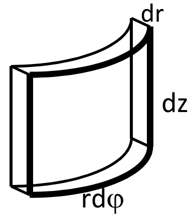
$$\vec{r} = r\cos\varphi\vec{i} + rsen\varphi\vec{j} + z\vec{k} = r\vec{u}_r + z\vec{k}$$

$$\vec{u}_r = r\cos\varphi\vec{i} + rsen\varphi\vec{j}$$

2.3. Sistema de coordenadas cilíndricas (r, φ,z)







$$d\vec{A} = (r d\varphi \cdot dz)\vec{u}_r$$

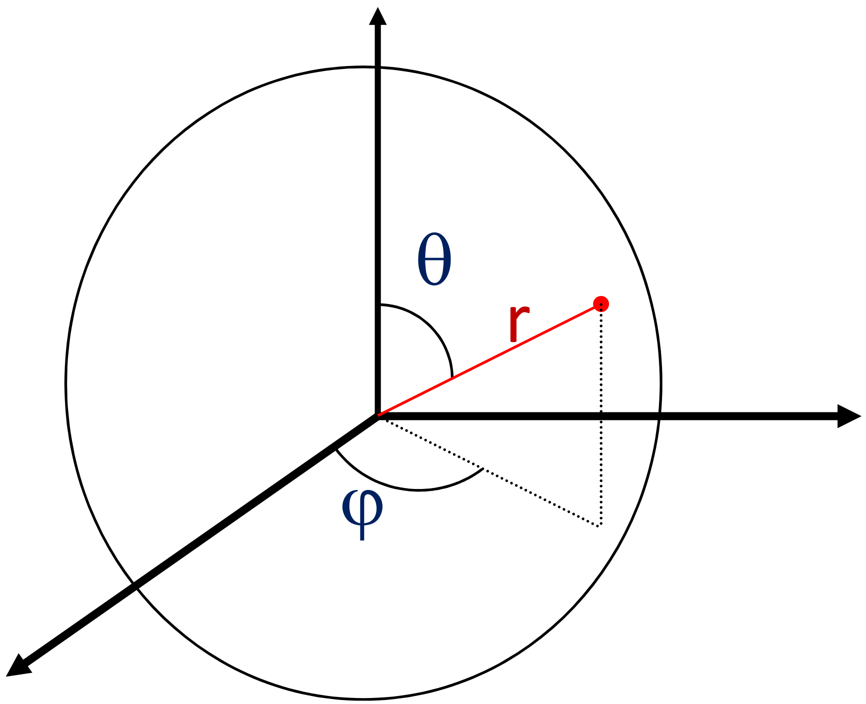
$$dV = (r d\varphi \cdot dz) dr$$

2.4. Sistema de coordenadas esféricas (r, θ,φ)

Un sistema de coordenadas esféricas se usa en espacios euclídeos tridimensionales. Este sistema de coordenadas esféricas está formado por tres ejes mutuamente perpendiculares que se cortan en el origen.

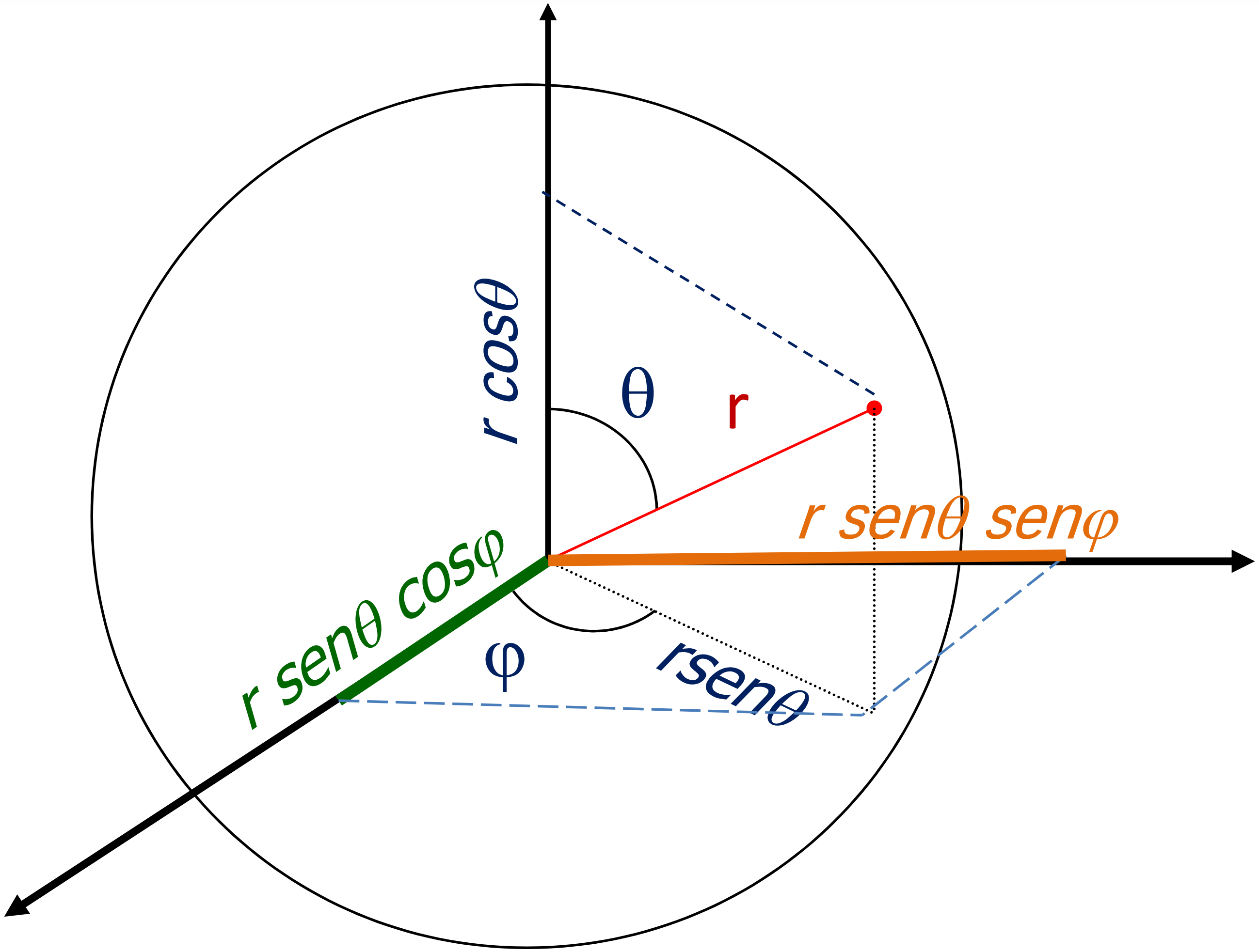
La primera coordenada (r) es la distancia entre el origen y el punto, siendo las otras dos los ángulos que es necesario girar para alcanzar la posición del punto. Se definen tres vectores unitarios perpendiculares entre sí que forman una base ortonormal ,

2.4. Sistema de coordenadas esféricas (r, θ,φ)



El radio r ($0 \leq r \leq R$) es la distancia desde el origen de coordenadas al punto, es el ángulo que forma r con la vertical ($0 \leq \theta \leq \pi$) y φ es el ángulo que forma la proyección de r sobre el plano XY con el eje X ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$).

2.4. Sistema de coordenadas esféricas (r, θ,φ)



La relación de las coordenadas cartesianas y curvilíneas esféricas es

$$x = rsen\theta \cos\varphi$$

$$y = rsen\theta sen\varphi$$

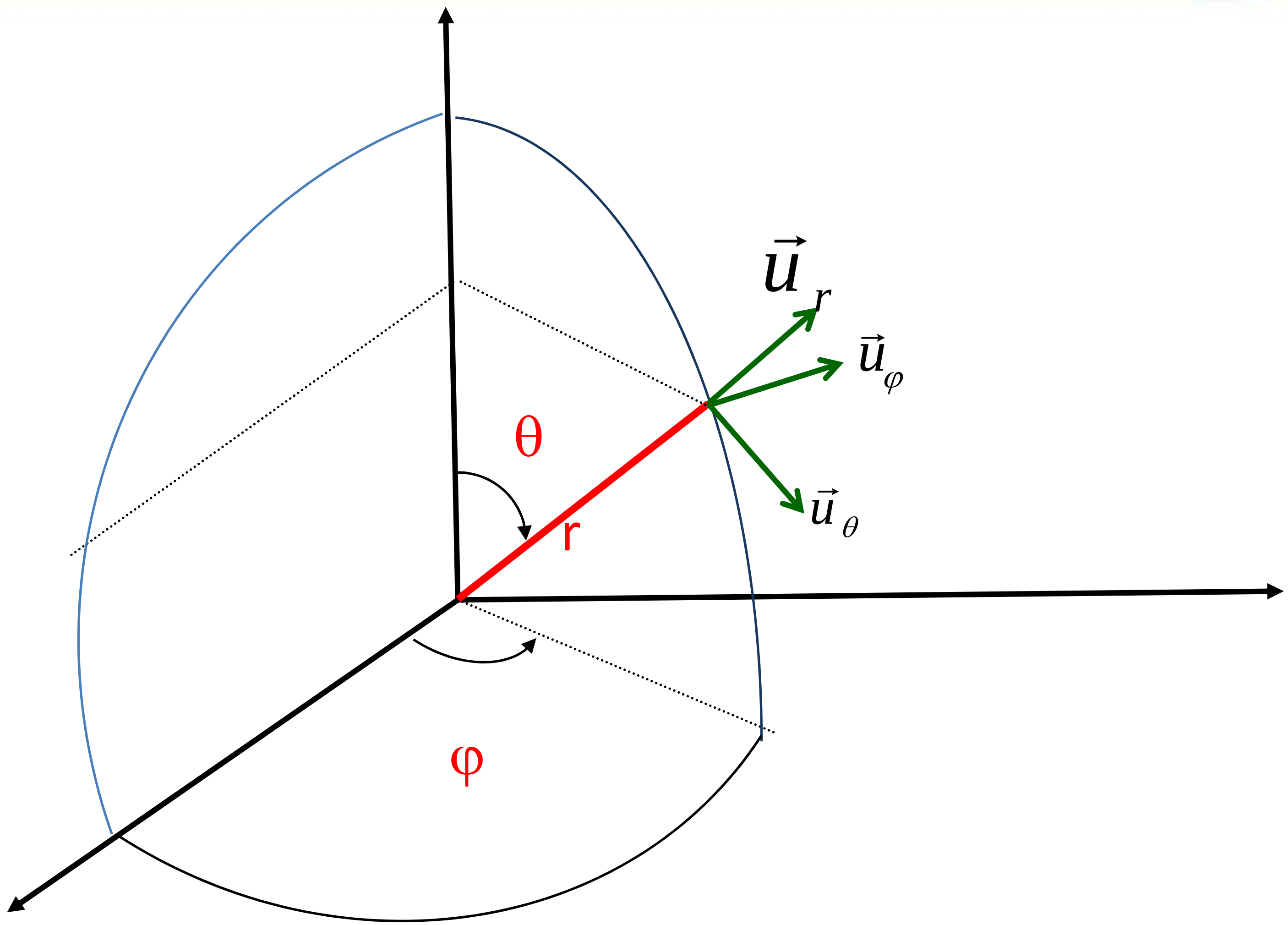
$$z = r\cos\theta$$

El vector de posición del punto P se puede expresar por

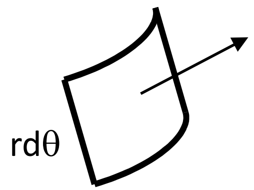
$$\vec{r} = rsen\theta \cos\varphi \vec{i} + rsen\theta sen\varphi \vec{j} + z\cos\theta \vec{k}$$

$$\vec{u}_r = r\cos\varphi \vec{i} + rsen\varphi \vec{j}$$

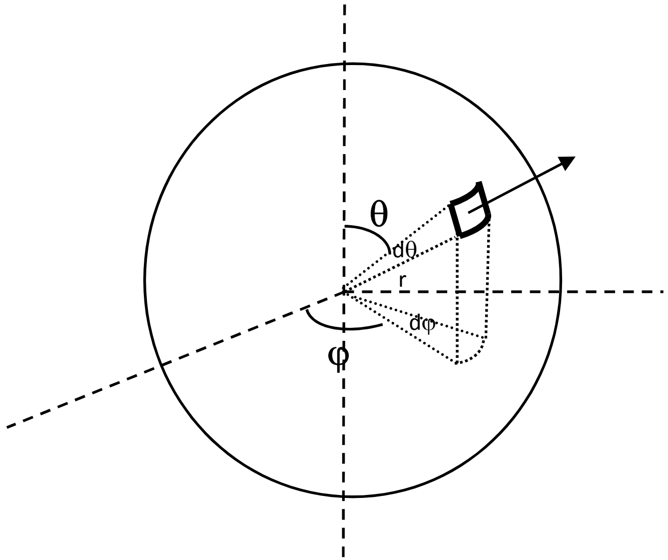
2.4. Sistema de coordenadas esféricas (r, θ,φ)



Un elemento diferencial de superficie sobre la superficie del cilindro se obtiene modificando infinitesimalmente los dos ángulos (dφ y dθ); el vector característico de la superficie es perpendicular a ella y en consecuencia tiene la dirección del radio



$$d\vec{A} = (r sen\theta d\varphi)\cdot(r d\theta)\vec{u}_r$$



Un elemento diferencial de volumen se obtiene considerando el elemento anterior y variando infinitesimalmente la profundidad en una cantidad dr

$$dV = (rsen d\varphi)\cdot(rd\theta)\cdot dr$$